

# MODÈLES GOODWINIENS DE CROISSANCE CYCLIQUE

Bernard Dupont

[Bernard.Dupont@univ-lille1.fr](mailto:Bernard.Dupont@univ-lille1.fr)

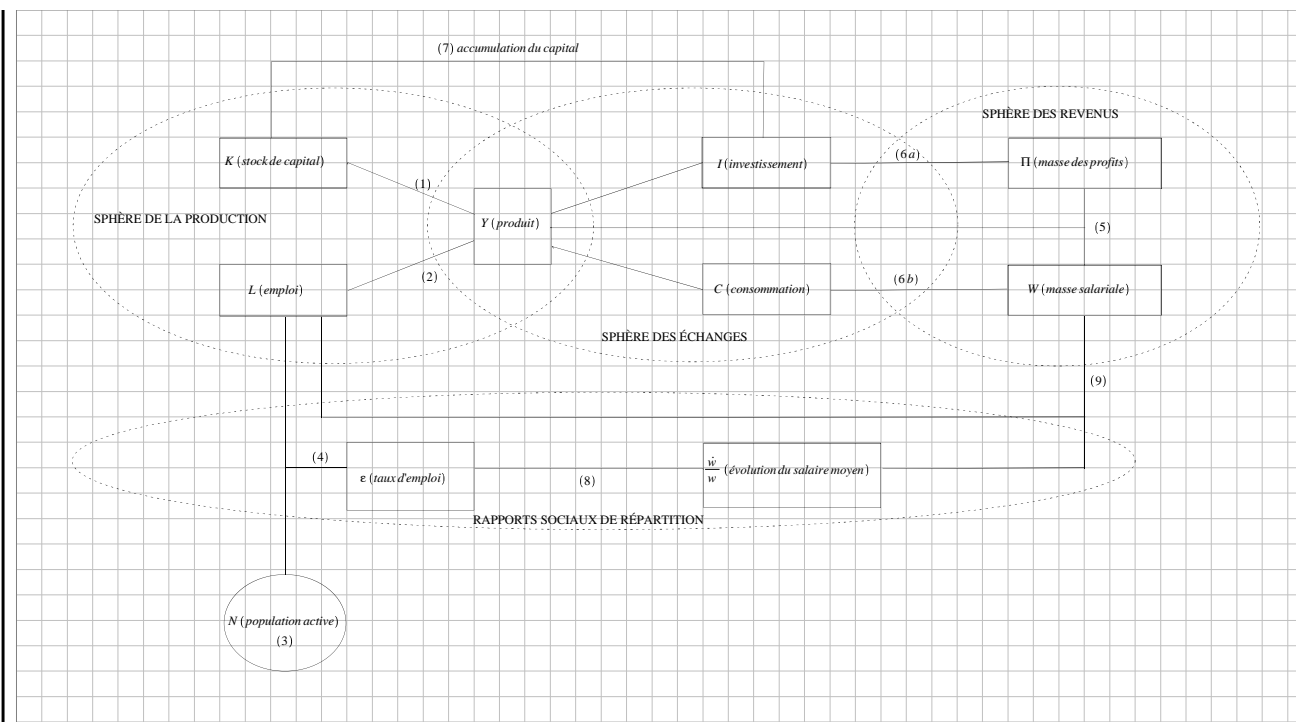
Depuis une vingtaine d'années, la théorie orthodoxe de la croissance économique repose sur l'idée fondamentale que les agents parviennent à maximiser leur bien être intertemporel, mesuré par la somme cumulée des flux de satisfaction retirée de leur consommation de biens et de services, sous des contraintes comptables dans un environnement de marchés. Les approches hétérodoxes du phénomène de croissance se démarquent de cette conception utilitariste et proposent des explications moins normatives. Elles s'enracinent dans des paradigmes anciens : école classique et école marxiste du XIX<sup>e</sup> siècle; école keynésienne au XX<sup>e</sup> siècle.

Ce chapitre est d'abord consacré aux travaux de R. M. Goodwin que de nombreux commentateurs situent dans le sillage des marxistes car les luttes de classes y jouent un rôle déterminant. Ce classement idéologique est quelque peu hâtif car on peut facilement détecter des influences classiques ou keynésiennes. A titre principal, l'auteur aborde la croissance cyclique, thématique absente chez Marx et ses successeurs qui se cantonnent dans les analyses de la reproduction simple et élargie. Il s'agit de montrer comment le système économique capitaliste génère de la croissance à travers des fluctuations endogènes. La pierre angulaire de l'article "A Growth Cycle" (1967) est que le revenu, en croissance par les effets de l'accumulation du capital, est disputé par les salariés-consommateurs et les capitalistes-investisseurs. Le partage entre salaires et profits est constamment arbitré par les variations du taux de chômage. La dynamique conjointe du taux de partage et du taux de chômage se traduit par des cycles réguliers autour d'un trend de croissance. La section 1 va exposer la logique du modèle in extenso puis montrer comment Maple peut être utilisé pour le résoudre et en illustrer toute l'élégance.

Mais élégance et simplicité ne sont pas des critères épistémologiques. Les économistes ont reproché au modèle de Goodwin son manque de robustesse au sens où il est marqué formellement par l'instabilité structurelle. Autrement dit, des modifications minimales des hypothèses peuvent entraîner la perte du résultat de croissance cyclique perpétuelle. Certains partisans inconditionnels de Goodwin ont voulu cependant montrer que son modèle pouvait supporter l'adjonction de mécanismes sans perte de propriétés dynamiques. C'est le cas de Gomblowski et Krüger dont on présente un de leurs travaux dans la section 2. Du point de vue technique, l'intérêt est d'explorer avec Maple un système dynamique non linéaire tri-dimensionnel.

## ▼ **Modèle de R. M. Goodwin (1967)**

Le modèle de Goodwin fait apparaître un bloc d'offre et un bloc de répartition des revenus et c'est ce qu'on retient habituellement (à ce sujet, se référer à Frédéric Lordon (1993) ou Gilbert Abraham-Frois et Edmond Berrebi (1995)). Mais cette dichotomie ne fait pas justice à la richesse des domaines abordés. Il est préférable de raisonner sur la trilogie sphère de la production/sphère des revenus/sphère des échanges, sur laquelle se greffe un bloc décrivant les rapports sociaux de production qui justifie l'emploi du qualificatif "marxien" pour situer le modèle sur la carte des théories économiques. Dans cette interprétation, la structure du modèle de Goodwin se schématise comme suit.



Dans la sphère de la production, le produit intérieur (en volume), noté  $Y$ , résulte de l'utilisation conjointe de deux facteurs de production : le capital, noté  $K$ , et l'emploi ou population active occupée, noté  $L$ .

La productivité apparente du capital est constante :  $\forall t, \frac{Y(t)}{K(t)} = \sigma$  avec  $\sigma > 0$  (équation (1)). Cette formulation est courante et traduit une régularité statistique du long terme. Nicholas Kaldor l'a d'ailleurs érigée en *fait stylisé* de la croissance.

Autre fait stylisé : la productivité du travail per capita croît à un taux positif constant :  $\forall t, \frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{Y(0)}{L(0)} e^{\alpha t}$  avec  $Y(0)$ ,  $L(0)$  et  $\alpha$  réels strictement positifs (équation (2)).

L'emploi doit être distingué de la force de travail disponible ou population active occupée, notée  $N$  et croissant au taux démographique moyen constant  $n$  :  $\forall t, N(t) = N(0) e^{nt}$  avec  $N(0) > 0$  et  $n \geq 0$  (équation (3)). Le taux d'emploi, qu'on notera  $\epsilon$ , est le rapport de l'emploi à la population active :  $\epsilon = \frac{L}{N}$  (équation (4)). Il est évidemment compris entre 0 (aucun salarié!) et 1 (toute la

population active est occupée). Son complément à 1 est le taux de chômage  $u = \frac{N-L}{N}$ . Le fait de distinguer l'emploi effectif de l'emploi potentiel signale l'existence d'un "marché du travail" ou, pour mieux dire dans la théorie marxiste, d'un marché où s'échange la force de travail.

La sphère des revenus distingue nettement les revenus des capitalistes ou profits, notés  $\Pi$ , et les revenus des travailleurs ou salaires, notés  $W$ . Comme tout le produit intérieur est distribué en revenus, on a, à toute date  $t$  :  $Y(t) = W(t) + \Pi(t)$  (équation (5)).

Tous les revenus rentrent dans la sphère des échanges sous forme de demande de biens de consommation et demande de biens d'investissement. On admet que les capitalistes utilisent tous les profits en achats d'investissements, notés  $I$ , et que les salariés dépensent tout ce qu'ils gagnent en achats de biens de consommation, notés  $C$  :  $\Pi(t) = I(t)$  (équation (6 a)) et  $W(t) = C(t)$  (équation (6 b)). La conséquence est que le marché des produits est toujours équilibré. Les cycles économiques ne peuvent donc pas provenir de déséquilibres entre l'offre et la demande globales. Autre conséquence : dans une perspective de long terme, les profits, qui s'identifient ici à l'épargne

nationale, financent l'accumulation du capital puisque, par définition, la variation nette du stock de capital est égale à l'investissement net :  $I(t) = \dot{K}(t)$  (équation (7)).

Le bloc des rapports sociaux de production décrit comment se forment les évolutions salariales. Goodwin retient une interprétation marxienne de la courbe de Phillips, bien connue en macroéconomie comme relation décroissante entre le taux de chômage et le taux de croissance du salaire moyen, noté  $w$ . Quand le taux d'emploi est faible (le taux de chômage est élevé), le pouvoir de négociation salariale des salariés est faible et la croissance du salaire moyen est réduite, voire négative. Réciproquement, quand le taux d'emploi est élevé (le taux de chômage est faible), les salariés obtiennent des augmentations du salaire moyen. On retient la formulation linéaire

$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \rho \varepsilon(t) - \xi$ , avec  $\rho$  et  $\xi$  strictement positifs (équation (8)). Les évolutions temporelles de la masse salariale  $W = wL$  se déduisent des évolutions conjointes de la population active occupée et du salaire moyen :  $\frac{\dot{W}}{W} = \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{L}}{L}$  (équation (9)).

Le modèle de Goodwin est évidemment dynamique, à cause des équations (2), (3), (7), (8) et (9). A titre principal, la dynamique est commandée de façon endogène par (7) et (8), c'est à dire par les effets conjugués de l'accumulation du capital et de la formation des salaires. D'une part, l'évolution du stock de capital dépend des profits, qui dépendent des salaires distribués et donc des revendications salariales. D'autre part, les évolutions salariales dépendent du taux d'emploi, mais l'emploi est un facteur de production complémentaire au capital utilisé, dont les variations sont financées par les profits. La dialectique résultante fait apparaître le rôle crucial du couple taux d'emploi/partage du revenu entre salaires et profits. Goodwin choisit de mettre en avant la dynamique conjointe du taux d'emploi et de la part des salaires dans le revenu, qu'on notera

$$\omega = \frac{W}{Y} = \frac{wL}{Y}.$$

## ▼ **Système dynamique en $(\varepsilon, \omega)$**

Le modèle de Goodwin consiste en un système dynamique non linéaire de dimension 2. Les deux équations différentielles expriment les lois d'évolution du taux d'emploi et de la part des salaires dans le revenu.

### ▼ **Loi d'évolution du taux d'emploi**

Par définition, le taux d'emploi est  $\varepsilon = \frac{L}{N}$ , d'où, par dérivation logarithmique

$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\dot{L}}{L} - n$  (par (3)). Puisque les gains de productivité du travail sont constants

(équation (2)), on a :  $\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \alpha$ . La croissance du produit est égale au rythme

d'accumulation du capital (car la productivité du capital est constante par (1)), donc

$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y}$ , ce qui entraîne  $\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{K} - \alpha$ . Mais  $\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{Y} \frac{Y}{K} = \sigma \frac{\dot{K}}{Y}$  (par (1)) et  $\dot{K} = \Pi$

(l'accumulation du capital est financée par les profits par (7) et (6 a)) et de plus  $\Pi = Y - W$

(par (5)); on a alors  $\frac{\dot{K}}{K} = \sigma \frac{\dot{K}}{Y} = \frac{\sigma(Y - W)}{Y} = \sigma(1 - \omega)$ . On obtient la loi d'évolution du taux d'emploi en fonction de la part des salaires :

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = \sigma(1 - \omega) - (\alpha + n)$$

### Loi d'évolution de la part des salaires

La dérivation logarithmique de  $\omega = \frac{wL}{Y}$  amène  $\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{Y}}{Y}$ . Par la relation de Phillips (8) et l'hypothèse de constance des gains de productivité du travail (2), on tire la loi d'évolution de la part des salaires en fonction du taux d'emploi :

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \rho \varepsilon - (\xi + \alpha)$$

### Système différentiel

L'évolution conjointe du taux d'emploi et de la part des salaires est donnée par le système différentiel (*SDG*) suivant :

$$(SDG) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) [ -\sigma \omega(t) + \sigma - (\alpha + n) ] \\ \dot{\omega}(t) = \omega(t) [ \rho \varepsilon(t) - (\xi + \alpha) ] \end{cases}$$

avec  $\sigma > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\xi > 0$  et, de plus,  $\sigma > \alpha + n$ .

On est en présence d'un système différentiel planaire non linéaire dont il est possible de construire les courbes intégrales (c'est ainsi que procède Goodwin après avoir reconnu en (*SDG*) l'analogie du modèle archi connu "prédateurs-proies"), mais dont on va essentiellement mener ici l'étude au voisinage des équilibres. L'analyse des propriétés dynamiques locales se fait en deux temps : repérage des équilibres (points stationnaires) puis linéarisation de (*SDG*) au voisinage de chaque équilibre afin de caractériser le type de la dynamique locale.

Dans ce genre d'étude, on a intérêt à commencer par poser 2 fonctions de 2 variables, qui reprennent les membres de droite du système différentiel :

```
> restart;
Feps:=(x,y)->x*(-sigma*y+sigma-alpha-n);
Fome:=(x,y)->y*(rho*x-xi-alpha);
Feps := (x, y) → x ( -σ y + σ - α - n )
Fome := (x, y) → y ( ρ x - ξ - α )
```

(1.1.3.1)

Le remplacement des variables muettes **x** et **y** par **epsilon** et **omega** permettra de calculer les équilibres et l'expression de la jacobienne du système et leur remplacement par **epsilon(t)** et **omega(t)** correspondra aux membres de droite du système différentiel (*SDG*).

### Equilibres du modèle de Goodwin

La recherche des équilibres utilise l'instruction **solve** :

```
> equis:=solve({Feps(epsilon,omega),Fome(epsilon,omega)},
[epsilon,omega]);
```

$$equis := \left[ [\varepsilon = 0, \omega = 0], \left[ \varepsilon = \frac{\xi + \alpha}{\rho}, \omega = -\frac{-\sigma + \alpha + n}{\sigma} \right] \right]$$

(1.2.1)

Maple renvoie deux solutions : l'équilibre trivial (0, 0) et un équilibre "intéressant" puisque ses deux composantes sont strictement positives. Assignons ces équilibres :

```
> epsilon_triv:=rhs(equis[1,1]);
omega_triv:=rhs(equis[1,2]);
```

```

epsilon_int:=rhs(equis[2,1]);
omega_int:=rhs(equis[2,2]);
        epsilon_triv:=0
        omega_triv:=0
        epsilon_int:=  $\frac{\xi + \alpha}{\rho}$ 
omega_int:= -  $\frac{-\sigma + \alpha + n}{\sigma}$ 

```

(1.2.2)

## Propriétés locales des équilibres

Pour une dynamique planaire, les propriétés locales d'un équilibre sont données par les valeurs propres de la matrice jacobienne du système différentiel calculée en ce point. On commence donc par chercher l'expression générale de la jacobienne avant de calculer ses composantes en chaque point d'équilibre.

### Expression de la jacobienne

On crée une matrice 2x2 dont les composantes sont les dérivées partielles premières des fonctions **Feps** et **Fome** :

```

> Jac:=Matrix(2,2,[[diff(Feps(epsilon,omega),epsilon),diff
(Feps(epsilon,omega),omega)], [diff(Fome(epsilon,omega),
epsilon),diff(Fome(epsilon,omega),omega)]]);

```

$$Jac := \begin{bmatrix} -\sigma\omega + \sigma - \alpha - n & -\varepsilon\sigma \\ \omega\rho & \rho\varepsilon - \xi - \alpha \end{bmatrix} \quad (1.3.1.1)$$

### Equilibre trivial

A l'équilibre (0, 0), la jacobienne vaut :

```

> Jac_triv:=subs({epsilon=epsilon_triv,omega=omega_triv},
Jac);

```

$$Jac_{triv} := \begin{bmatrix} \sigma - \alpha - n & 0 \\ 0 & -\xi - \alpha \end{bmatrix} \quad (1.3.2.1)$$

La matrice est diagonale et donne immédiatement ses valeurs propres. Comme tous les paramètres du modèle sont positifs et qu'on a en outre supposé  $\sigma > \alpha + n$ , les valeurs propres sont de signe opposé :  $\lambda_1 = \sigma - \alpha - n > 0$  et  $\lambda_2 = -\xi - \alpha < 0$ . L'équilibre trivial est par conséquent un col (ou : point selle).

### Equilibre non trivial

Au point d'équilibre  $\left( \frac{\xi + \alpha}{\rho}, \frac{\sigma - (\alpha + n)}{\sigma} \right)$ , la jacobienne vaut :

```

> Jac_int:=subs({epsilon=epsilon_int,omega=omega_int},Jac);

```

$$Jac\_int := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(\xi + \alpha) \sigma}{\rho} \\ -\frac{(-\sigma + \alpha + n) \rho}{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.3.1)$$

Ses caractéristiques sont facilement mises en évidence par les commandes du paquetage **LinearAlgebra**.

```
> with(LinearAlgebra):#chargement du paquetage
polyc:=CharacteristicPolynomial(Jac_int,lambda);#polynôme
caractéristique
polyc:=λ2 - (-σ + α + n) (ξ + α) (1.3.3.2)
```

Manifestement, les valeurs propres sont les racines carrées d'un nombre négatif :

```
> isolate(polyc,lambda^2);#réécriture de l'équation
caractéristique
is(rhs(<)%<0) assuming xi>0,alpha>0,n>0,sigma>0,
sigma>alpha+n;#test sur le signe du membre de droite
λ2 = (-σ + α + n) (ξ + α)
true (1.3.3.3)
```

Ainsi les 2 valeurs propres sont des imaginaires purs. L'équilibre non trivial est un centre.

### Commentaires

Le modèle de croissance cyclique de Goodwin génère 2 équilibres qui n'ont pas le même statut. L'équilibre trivial est instable et économiquement peu pertinent (il correspond à un état du système capitaliste où le taux d'emploi et la part des salaires dans le revenu national sont nuls!).

L'équilibre non trivial constitue un centre de la dynamique. Il est asymptotiquement instable mais stable au sens de Lyapunov. Dans son voisinage, les orbites forment des courbes fermées dont l'interprétation économique est aisée. Des cycles de nature endogène sont des produits fatals de la croissance capitaliste. Une période d'expansion est marquée par un recul de "l'armée de réserve industrielle". L'augmentation du taux d'emploi place les travailleurs salariés en position de force dans les négociations salariales. Les salaires augmentent progressivement. Quand leur accroissement est plus fort que celui de la productivité du travail, la part des salaires dans le revenu national augmente alors que la part des profits se met à diminuer. Les investissements sont alors automatiquement révisés à la baisse. La production est freinée et les firmes licencient. La phase de récession est marquée par une diminution continue des rémunérations du travail qui va peu à peu améliorer la part des profits dans le revenu national, donc relancer les investissements, la production puis l'emploi. Le diagramme de phase du système (*SDG*) va illustrer le fait que cette propriété est non seulement locale, mais aussi globale.

### Diagramme de phase du modèle de Goodwin

Le diagramme des phases se trace avec la commande **DEplot** du paquetage **DEtools**, dont le premier argument est évidemment le système différentiel étudié.

```
> sysdiffg:=diff(epsilon(t),t)=Feps(epsilon(t),omega(t)),diff
(omega(t),t)=Fome(epsilon(t),omega(t));#écriture des 2
```

## équations différentielles

$$\text{sysdiffg} := \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \varepsilon(t) (-\sigma \omega(t) + \sigma - \alpha - n), \quad \frac{d}{dt} \omega(t) = \omega(t) (\rho \varepsilon(t) - \xi - \alpha) \quad (1.4.1)$$

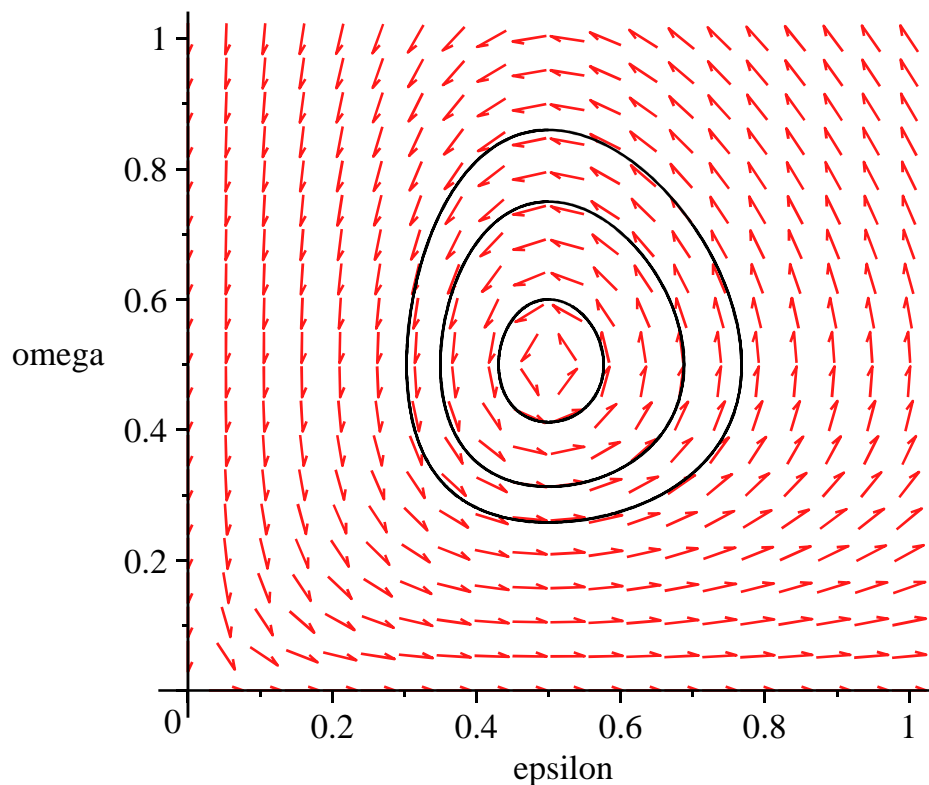
A ce stade, on doit attribuer des valeurs plausibles aux paramètres. On choisit ici une croissance démographique nulle, un capital-output ratio égal à 3, des gains de productivité du travail élevés et une relation de Phillips "nerveuse" (réaction forte des salaires au taux d'emploi).

```
> rho,xi,alpha,sigma,n:=5,1,1.5,3,0;#assignation des paramètres
sysdiffg;#système différentiel à représenter graphiquement
rho,xi,alpha,sigma,n:=5,1,1.5,3,0
```

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \varepsilon(t) (-3 \omega(t) + 1.5), \quad \frac{d}{dt} \omega(t) = \omega(t) (5 \varepsilon(t) - 2.5) \quad (1.4.2)$$

Le graphique suivant donne le champ directionnel et 3 orbites, qui sont des courbes fermées autour de l'équilibre-centre.

```
> with(DEtools):
Gg:=DEplot([sysdiffg],[epsilon(t),omega(t)],t=0..2*Pi,[
[epsilon(0)=0.5,omega(0)=0.6],[epsilon(0)=0.5,omega(0)=0.75],
[epsilon(0)=0.5,omega(0)=0.86]],epsilon(t)=0..1,omega(t)=0.
.1,stepsize=0.01,thickness=1,linecolor=black,method=rkf45)
:Gg;
```

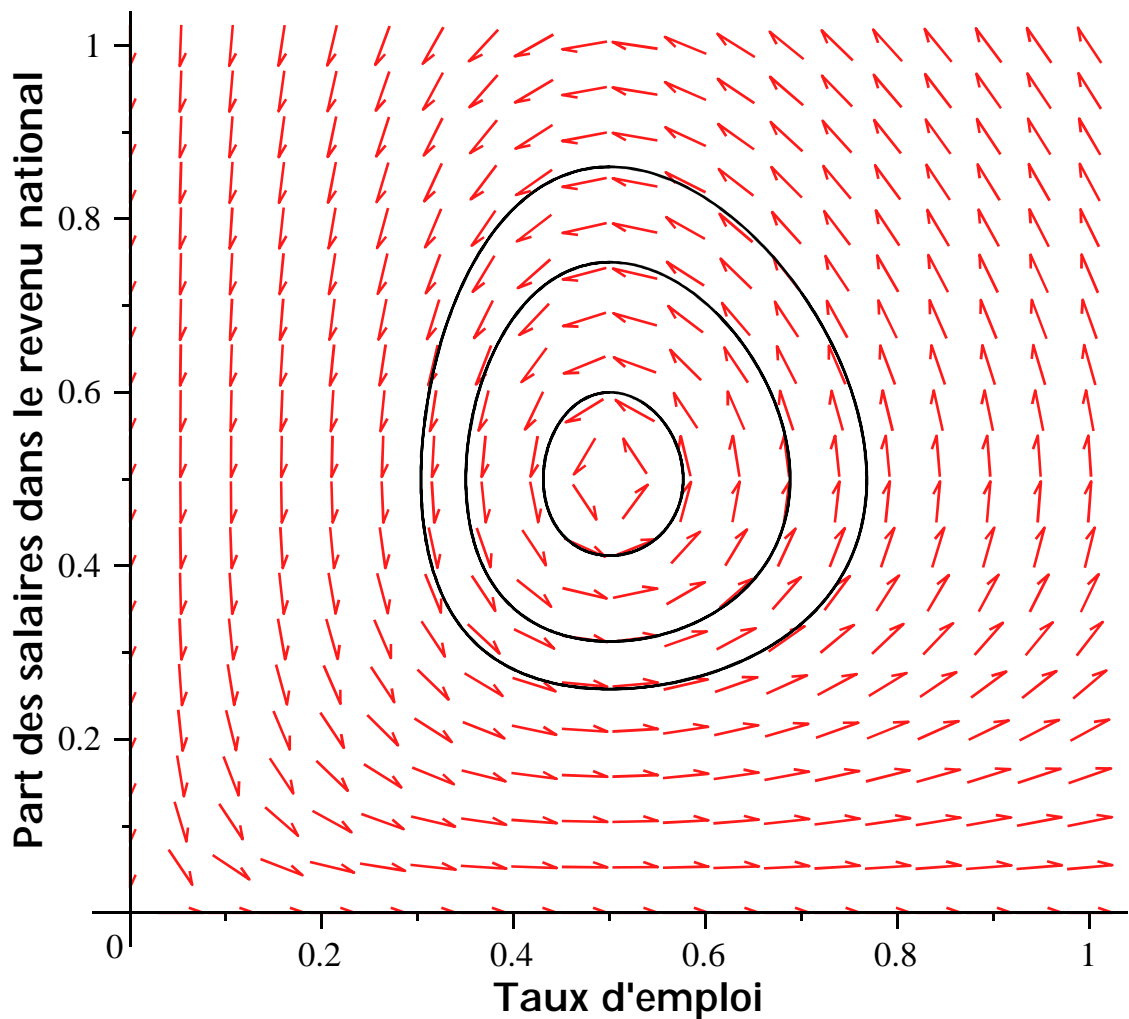


Les options de **DEplot** étant insuffisantes, la présentation du graphique est améliorée avec la commande **display** du paquetage **plots**.

```
> with(plots):
Ggvf:=display(Gg,title=`Diagramme de phase du modèle de
```

```
Goodwin\n`,titlefont=[Times,18,BOLD],labels=[`Taux d'emploi`,  
`Part des salaires dans le revenu national`],labeldirections=  
[horizontal,vertical],labelfont=[Times,12]):Ggvf;
```

## Diagramme de phase du modèle de Goodwin



### Conclusion sur le modèle de Goodwin

Le modèle de croissance cyclique de Goodwin a fait couler beaucoup d'encre. Il fascine les économistes, hétérodoxes bien entendu mais aussi orthodoxes (Samuelson et Solow en tête). De nombreux commentaires critiques ont été exposés, soit pour en minimiser la portée, soit pour améliorer sa portée théorique. Pour s'en tenir à ses partisans inconditionnels, convaincus que le phénomène de croissance capitaliste est nécessairement soumis à des fluctuations générées par les rapports de force sociaux, une des questions centrales est celle de sa "robustesse". En première approximation, il s'agit là d'un problème purement formel, qui s'est posé à l'origine dans l'étude du modèle biologique prédateurs-proies et qui s'est naturellement étendu au modèle de la lutte des classes. L'adjonction au modèle de perturbations légères ou d'hypothèses



supplémentaires peut faire perdre la propriété de cyclicité autour d'un équilibre-centre. Autant dire que le formidable pas en avant théorique que représente le modèle de Goodwin peut être remis en cause par son instabilité structurelle, c'est à dire son incapacité à conserver ses propriétés qualitatives dynamiques dès qu'on modifie à la marge ses équations de base. S'il est vrai que ce modèle ne résiste pas toujours à des manipulations, il n'en reste pas moins que la propriété de croissance avec cycles endogènes dus aux conflits de répartition est conservée dans certains cas comme va le montrer l'étude du modèle de Gombrowski et Krüger.

## ▼ **Modèle de Gombrowski et Krüger (1988)**

Ce modèle veut montrer la compatibilité de l'analyse de Goodwin avec les cycle courts (cycles des affaires) en injectant des doses de keynésianisme, en particulier, dans les comportements d'épargne et d'investissement. Mais l'intérêt majeur ici réside dans la variation de la productivité du capital qui ne remet pas en cause la croissance cyclique, alors que Samuelson et Solow doutaient de la robustesse du modèle goodwinien en présence de facteurs substituables.

### ▼ **Structure du modèle**

Vue l'orientation keynésienne du modèle, les variables clés s'articulent autour du marché du travail, du marché des biens et services et de la sphère productive. On adopte les notations suivantes :  $Y, L, N, w, I, S$  désignent respectivement le produit global (égal au revenu global en économie fermée), la population active occupée, la population active totale, le salaire moyen, l'investissement et l'épargne.

#### ▼ **Marché du travail**

La population active totale croît au taux naturel constant  $n$  :  $\frac{\dot{N}}{N} = n$

Les gains de productivité du travail sont constants :  $\frac{Y}{L} = e^{\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ . La conséquence est que

l'emploi est gouverné par le PIB effectif, d'où :  $\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha$ .

Le taux d'emploi est défini par  $\varepsilon = \frac{L}{N}$ , d'où, par dérivation logarithmique par rapport au

temps :  $\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\dot{Y}}{Y} - (\alpha + n)$

Comme chez Goodwin, le salaire réel est gouverné par la relation de Phillips :  $\frac{\dot{w}}{w} = a_1\varepsilon - a_2$  avec  $a_1$  et  $a_2 > 0$ .

La part des salaires dans le revenu est  $\omega = \frac{wL}{Y}$ , impliquant par dérivation logarithmique par rapport au temps :

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{Y}}{Y} = a_1\varepsilon - (a_2 + \alpha)$$

#### ▼ **Marché des biens et services**

La croissance effective est la somme du trend de croissance exogène espéré, noté  $y$ , et d'un effet accélérateur, mesuré par la réaction des firmes à l'écart entre l'investissement et

l'épargne :  $\frac{\dot{Y}}{Y} = y + \delta \left( \frac{I}{Y} - \frac{S}{Y} \right)$  avec  $y$  et  $\delta > 0$ .

L'investissement est financé par une part constante des profits :  $I = c(Y - wL)$  où  $0 < c \leq 1$ . Dans la tradition keynésienne, l'épargne est différenciée et on distingue le taux d'épargne des salariés,  $s_1$ , et celui, plus élevé, des capitalistes,  $s_2$ . L'épargne nationale est la somme des épargnes des deux groupes sociaux :

$$S = s_1 wL + s_2(Y - wL) = (s_2 + (s_1 - s_2)\omega)Y \text{ avec } 0 < s_1 < s_2 < c \leq 1$$

Alors :  $\frac{\dot{Y}}{Y} = y + \delta(c(1 - \omega) - (s_2 + (s_1 - s_2)\omega))$ , soit encore :

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = y + \delta((c - (s_2 - s_1))(1 - \omega) - s_1)$$

On réécrit le taux d'emploi :

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\dot{Y}}{Y} - (\alpha + n) = y + \delta((c - (s_2 - s_1))(1 - \omega) - s_1) - (\alpha + n)$$

Posons alors  $g = c - (s_2 - s_1) > 0$  car  $c - s_2 > 0$  et  $s_1 > 0$  :

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\delta g \omega + \delta(g - s_1) + y - (\alpha + n)$$

### ▼ Coefficient de capital

Par définition, le coefficient de capital est  $\sigma = \frac{K}{Y}$ . Contrairement à Goodwin, il est variable :

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \frac{\dot{K}}{K} -$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{Y} \frac{Y}{K} - \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{I}{Y} \frac{Y}{K} - \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{c(Y - wL)}{Y} \frac{Y}{K} - \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{c(1 - \omega)}{\sigma} - y - \delta(g(1 - \omega) - s_1)$$

Tous calculs faits :

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \left( -\frac{c}{\sigma} + \delta g \right) \omega + \frac{c}{\sigma} - y - \delta(g - s_1)$$

### ▼ Système différentiel en $(\omega, \varepsilon, \sigma)$

Le coeur du modèle est un système dynamique tridimensionnel non linéaire en  $\omega, \varepsilon$  et  $\sigma$ .

$$(SDGK) \quad \begin{cases} \dot{\omega} = \omega [a_1 \varepsilon - (a_2 + \alpha)] \\ \dot{\varepsilon} = \varepsilon [ -\delta g \omega + \delta(g - s_1) + y - (\alpha + n) ] \\ \dot{\sigma} = \sigma \left[ \left( -\frac{c}{\sigma} + \delta g \right) \omega + \frac{c}{\sigma} - y - \delta(g - s_1) \right] \end{cases}$$

> restart;

Fome := (x, y, a1, a2, alpha) -> x \* (a1 \* y - (a2 + alpha));

Feps := (x, y, alpha, n, g, s1, delta, gy) -> y \* (-delta \* g \* x + delta \* (g - s1) + gy - (alpha + n));

Fsig := (x, z, c, delta, g, gy, s1) -> z \* ((-c / z + delta \* g) \* x + c / z - gy - delta \* (g - s1));

$$\begin{aligned}
F_{ome} &:= (x, y, a1, a2, \alpha) \rightarrow x (a1 y - a2 - \alpha) \\
F_{eps} &:= (x, y, \alpha, n, g, s1, \delta, gy) \rightarrow y (-\delta g x + \delta (g - s1) + gy - \alpha - n) \\
F_{sig} &:= (x, z, c, \delta, g, gy, s1) \rightarrow z \left( \left( -\frac{c}{z} + \delta g \right) x + \frac{c}{z} - gy - \delta (g - s1) \right)
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Ses propriétés essentielles sont étudiées avec Maple en procédant méthodiquement : détection des équilibres; propriétés locales des équilibres; diagramme des phases.

## Equilibres dynamiques

On cherche les trajectoires constantes vérifiant (*SDGK*).

```

> equis:=solve({Fome(omega,epsilon,a1,a2,alpha),Feps(omega,
epsilon,alpha,n,g,s1,delta,gy),Fsig(omega,sigma,c,delta,g,gy,
s1)},[omega,epsilon,sigma]);

```

$$\begin{aligned}
equis &:= \left[ \left[ \omega = 0, \varepsilon = 0, \sigma = \frac{c}{gy + \delta g - \delta s1} \right], \left[ \omega = -\frac{-\delta g + \delta s1 - gy + \alpha + n}{\delta g}, \varepsilon \right. \right. \\
&= \left. \left. \frac{a2 + \alpha}{a1}, \sigma = \frac{c (\delta s1 - gy + \alpha + n)}{\delta g (\alpha + n)} \right] \right]
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Maple détecte deux équilibres. Le premier peut être qualifié de trivial car il correspond à une situation où la part des salaires et le taux d'emploi sont nuls. Le second décrit une situation plausible.

```

> omega_triv:=rhs(equis[1,1]);#coordonnées de l'équilibre
trivial
epsilon_triv:=rhs(equis[1,2]);
sigma_triv:=rhs(equis[1,3]);
omega_int:=rhs(equis[2,1]);#coordonnées de l'équilibre non
trivial
epsilon_int:=rhs(equis[2,2]);
sigma_int:=rhs(equis[2,3]);

```

$$\begin{aligned}
\omega_{triv} &:= 0 \\
\epsilon_{triv} &:= 0 \\
\sigma_{triv} &:= \frac{c}{gy + \delta g - \delta s1} \\
\omega_{int} &:= -\frac{-\delta g + \delta s1 - gy + \alpha + n}{\delta g} \\
\epsilon_{int} &:= \frac{a2 + \alpha}{a1} \\
\sigma_{int} &:= \frac{c (\delta s1 - gy + \alpha + n)}{\delta g (\alpha + n)}
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

## Propriétés locales de l'équilibre non trivial

La première étape consiste à calculer la jacobienne du système (*SDGK*).

```
> Jac:=Matrix(3,3,[diff(Fome(omega,epsilon,a1,a2,alpha),
omega),diff(Fome(omega,epsilon,a1,a2,alpha),epsilon),diff
(Fome(omega,epsilon,a1,a2,alpha),sigma)],diff(Feps(omega,
epsilon,alpha,n,g,s1,delta,gy),omega),diff(Feps(omega,
epsilon,alpha,n,g,s1,delta,gy),epsilon),diff(Feps(omega,
epsilon,alpha,n,g,s1,delta,gy),sigma)],diff(Fsig(omega,
sigma,c,delta,g,gy,s1),omega),diff(Fsig(omega,sigma,c,delta,
g,gy,s1),epsilon),diff(Fsig(omega,sigma,c,delta,g,gy,s1),
sigma)]));
```

$$Jac := \begin{bmatrix} a1 \varepsilon - a2 - \alpha, \omega a1, 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4.1)$$

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon \delta g, -\delta g \omega + \delta (g - s1) + gy - \alpha - n, 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma \left( -\frac{c}{\sigma} + \delta g \right), 0, \left( -\frac{c}{\sigma} + \delta g \right) \omega + \frac{c}{\sigma} - gy - \delta (g - s1) + \sigma \left( \frac{c \omega}{\sigma^2} - \frac{c}{\sigma^2} \right) \end{bmatrix}$$

On ne s'intéresse qu'à l'équilibre non trivial. La deuxième étape calcule les composantes de la jacobienne au point (**omega\_int,epsilon\_int,sigma\_int**).

```
> Jac_int:=simplify(subs({omega=omega_int,epsilon=epsilon_int,
sigma=sigma_int},Jac));
```

$$Jac\_int := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(-\delta g + \delta s1 - gy + \alpha + n) a1}{\delta g} & 0 \\ -\frac{(a2 + \alpha) \delta g}{a1} & 0 & 0 \\ \frac{(\delta s1 - gy) c}{\alpha + n} & 0 & -\alpha - n \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

Quelques manipulations sont nécessaires pour simplifier **Jac\_int**. L'objectif est de faire apparaître explicitement les composantes **omega\_int**, **epsilon\_int** et **sigma\_int**.

```
> is(Jac_int[1,2]=a1*omeq);#test
is(Jac_int[2,1]=-delta*g*epsq);#test
is(Jac_int[3,1]=-c+delta*g*sigq);#test
true
true
true \quad (2.4.3)
```

```
> Jac_int[1,2]:=a1*omeq;
Jac_int[2,1]:=-delta*g*epsq;
Jac_int[3,1]:=-c+delta*g*sigq;
Jac_int;#jacobienne simplifiée
Jac_int_{1,2}:=a1 omeq
```

$$\begin{aligned}
 Jac\_int_{2,1} &:= -\delta g \epsilon \sigma q \\
 Jac\_int_{3,1} &:= -c + \delta g \sigma q \\
 \begin{bmatrix} 0 & a_1 \omega e q & 0 \\ -\delta g \epsilon \sigma q & 0 & 0 \\ -c + \delta g \sigma q & 0 & -\alpha - n \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

La troisième étape calcule les valeurs propres de **Jac\_int**.

```

> with(LinearAlgebra):#chargement du paquetage LinearAlgebra
Eigenvalues(Jac_int) assuming delta>0,g>0,c>0,a1>0,alpha>0,
n>0,omeq>0,epsq>0,sigq>0;#calcul des valeurs propres en
tenant compte des hypothèses sur les paramètres et les
composantes de l'équilibre non trivial

```

$$\begin{bmatrix} -\alpha - n \\ I\sqrt{\delta g \epsilon \sigma q a_1 \omega e q} \\ -I\sqrt{\delta g \epsilon \sigma q a_1 \omega e q} \end{bmatrix} \tag{2.4.5}$$

Une valeur propre est un réel strictement négatif et les deux autres valeurs propres sont des complexes conjugués. Comme les valeurs propres complexes sont des imaginaires purs, l'équilibre n'est pas asymptotiquement stable. En fait, les variables  $\omega$  et  $e$  ont un comportement

cyclique perpétuel de période  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta g a_1 \epsilon^e \omega^e}}$  (on retrouve les propriétés du modèle de

Goodwin) alors que le coefficient de capital converge vers sa valeur d'équilibre. Cette propriété tient au fait que le système différentiel est hiérarchisé : les deux premières équations différentielles ne dépendent pas de la troisième variable, et donc la valeur propre réelle négative n'influence pas les trajectoires de la part des salaires et du taux d'emploi.

## Diagramme de phase du modèle de Glombowski et Krüger

L'utilisation de la commande **DEplot3d** du paquetage **DEtools** confirme l'allure de la dynamique au niveau global. On la prépare en assignant le système différentiel et les variables (fonctions inconnues).

```

> eqd1:=diff(omega(t),t)=Fome(omega(t),epsilon(t),a1,a2,alpha);
#évolution de la part des salaires
eqd2:=diff(epsilon(t),t)=Feps(omega(t),epsilon(t),alpha,n,g,
s1,delta,gy);#évolution du taux d'emploi
eqd3:=diff(sigma(t),t)=Fsig(omega(t),sigma(t),c,delta,g,gy,
s1);#évolution du coefficient de capital
sysdif:={eqd1,eqd2,eqd3};#système différentiel
var:={omega(t),epsilon(t),sigma(t)};#fonctions inconnues

```

$$eqd1 := \frac{d}{dt} \omega(t) = \omega(t) (a_1 \epsilon(t) - a_2 - \alpha)$$

$$\begin{aligned}
eqd2 &:= \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \varepsilon(t) (-\delta g \omega(t) + \delta (g - sI) + gy - \alpha - n) \\
eqd3 &:= \frac{d}{dt} \sigma(t) = \sigma(t) \left( \left( -\frac{c}{\sigma(t)} + \delta g \right) \omega(t) + \frac{c}{\sigma(t)} - gy - \delta (g - sI) \right) \\
sysdif &:= \left\{ \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \varepsilon(t) (-\delta g \omega(t) + \delta (g - sI) + gy - \alpha - n), \frac{d}{dt} \omega(t) \right. \\
&= \omega(t) (a1 \varepsilon(t) - a2 - \alpha), \frac{d}{dt} \sigma(t) = \sigma(t) \left( \left( -\frac{c}{\sigma(t)} + \delta g \right) \omega(t) + \frac{c}{\sigma(t)} - gy \right. \\
&\left. \left. - \delta (g - sI) \right) \right\} \\
var &:= \{\varepsilon(t), \omega(t), \sigma(t)\} \tag{2.5.1}
\end{aligned}$$

On choisit un jeu de paramètres satisfaisant aux conditions du modèle.

```

> a1,a2,alpha,n,g,s1,delta,gy,c:=1,0.94,0.03,0.01,0.32,0.05,3,
0.04,0.5;#paramétrage du système
sysdif;
a1, a2, α, n, g, s1, δ, gy, c := 1, 0.94, 0.03, 0.01, 0.32, 0.05, 3, 0.04, 0.5

```

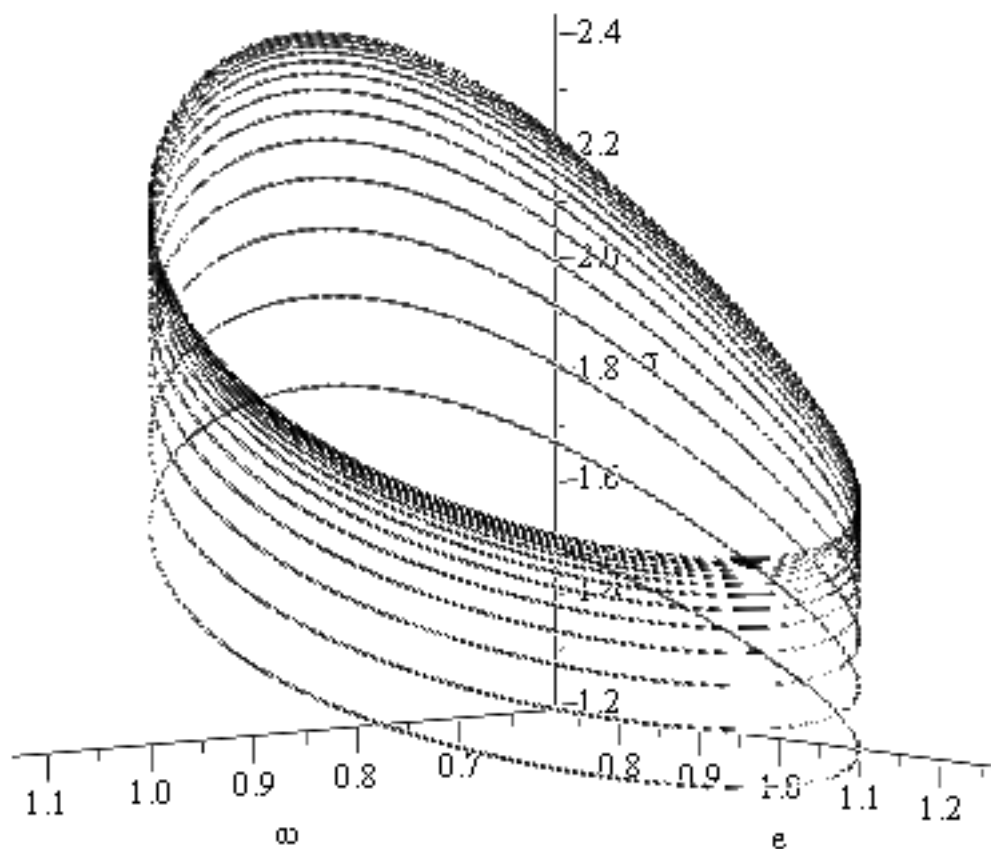
$$\left\{ \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \varepsilon(t) (-0.96 \omega(t) + 0.81), \frac{d}{dt} \omega(t) = \omega(t) (\varepsilon(t) - 0.97), \frac{d}{dt} \sigma(t) \right. \tag{2.5.2} \\
\left. = \sigma(t) \left( \left( -\frac{0.5}{\sigma(t)} + 0.96 \right) \omega(t) + \frac{0.5}{\sigma(t)} - 0.85 \right) \right\}$$

Reste à tracer une orbite dans l'espace de phase.

```

> with(DEtools):
grafgk:=DEplot3d(sysdif,var,t=0..100,[[omega(0)=0.66,epsilon
(0)=0.8,sigma(0)=1.5]],stepsize=0.01,scene=[omega,epsilon,
sigma],orientation=[51,84],linecolor=black,thickness=2,axes=
normal,labels=[`omega`,`epsilon`,`sigma`]):grafgk;

```



L'orbite tri-dimensionnelle converge vers un cycle perpétuel : certes, le capital-output ratio  $\sigma$  tend vers sa valeur d'équilibre de long terme mais la part des salaires et le taux d'emploi oscillent perpétuellement autour de l'équilibre non trivial. Cette dernière propriété dynamique est exactement celle qui avait été mise en évidence chez Goodwin et justifie la qualification de modèle de croissance cyclique. Gombrowski et Krüger prouvent ainsi que toute modification au modèle originel de Goodwin ne brise pas sa propriété essentielle.

## Bibliographie

- Gilbert ABRAHAM-FROIS et Edmond BERREBI, (1995), Instabilité, cycles, chaos, *Economica*.  
 Jorg GLOMBOWSKI et Michael KRÜGER, (1988), "A short period Growth Model", *Recherches économiques de Louvain*, vol.54, n°4.  
 Richard M. GOODWIN, (1967), "A Growth Cycle", in Feinstein C.H (ed) *Socialism, Capitalism and Economic Growth*.  
 Frédéric LORDON, (1993), "Irrégularités des trajectoires de croissance, évolutions et dynamique non-linéaire. Vers une schématisation de l'endométabolisme", Thèse EHESS.