GRAPHES 3D : SOLUTIONS DES EXERCICES

Bernard Dupont

Bernard.Dupont@univ-lille1.fr

Exercice M1

Enoncé

La surface (S) est le graphe de la fonction f définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1. Donner une représentation géométrique dans l'espace de (S). On obtient un paraboloïde elliptique.

2. Tracer l'intersection de (S) avec le plan d'équation $x = 0$.

3. Tracer les courbes de niveau ainsi que leur projection dans le plan xOy correspondant à chacun des cas suivants : $z = 0$, $z = 1$ et $z = -1$.

Solution

On commence par poser la fonction-procédure et par charger les paquetages `plots` et `plottools` dont on aura besoin.

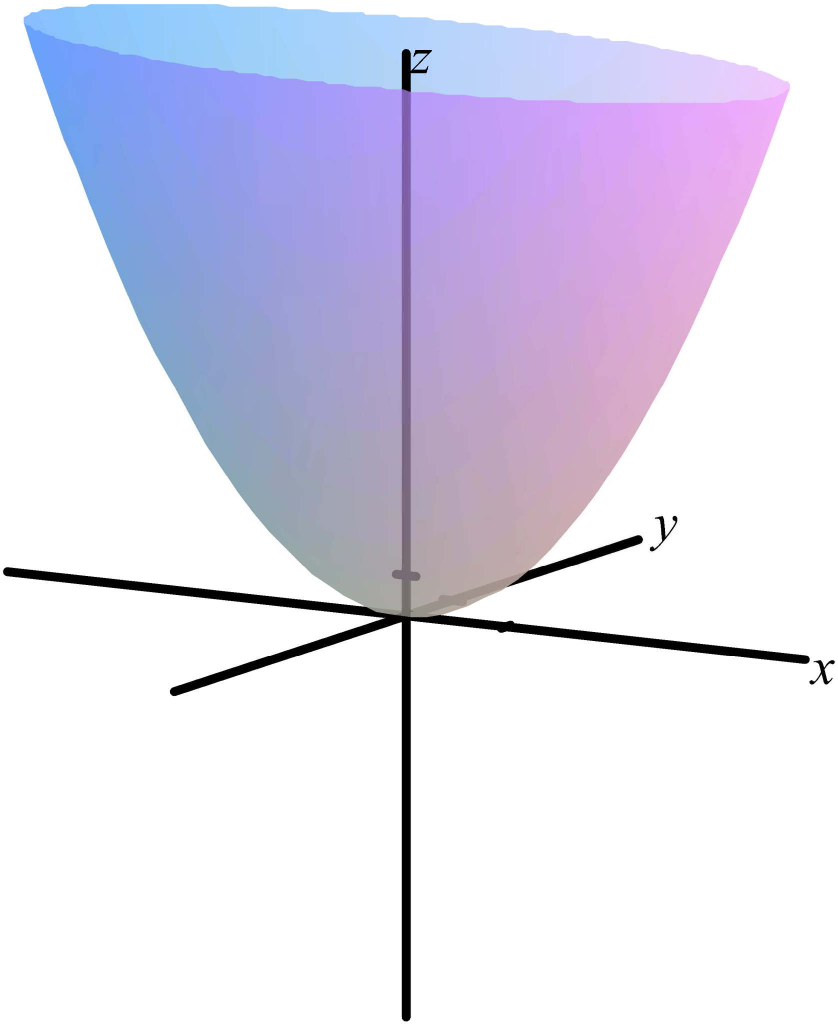
```
> restart;
  with(plots):with(plottools):
  f1:=(x,y)->x^2+4*y^2;
```

$$f1 := (x, y) \rightarrow x^2 + 4y^2 \qquad \textbf{(1.1)}$$

1. Ce genre de surface est difficile à représenter correctement. L'utilisation directe de `plot3d` donne des résultats mitigés. On a pris ici le parti de tracer une surface avec un effet de transparence dans un repère orthonormé, les axes étant très visibles, les graduations réduites à $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ et les labels x, y, et z placés au bout des axes.

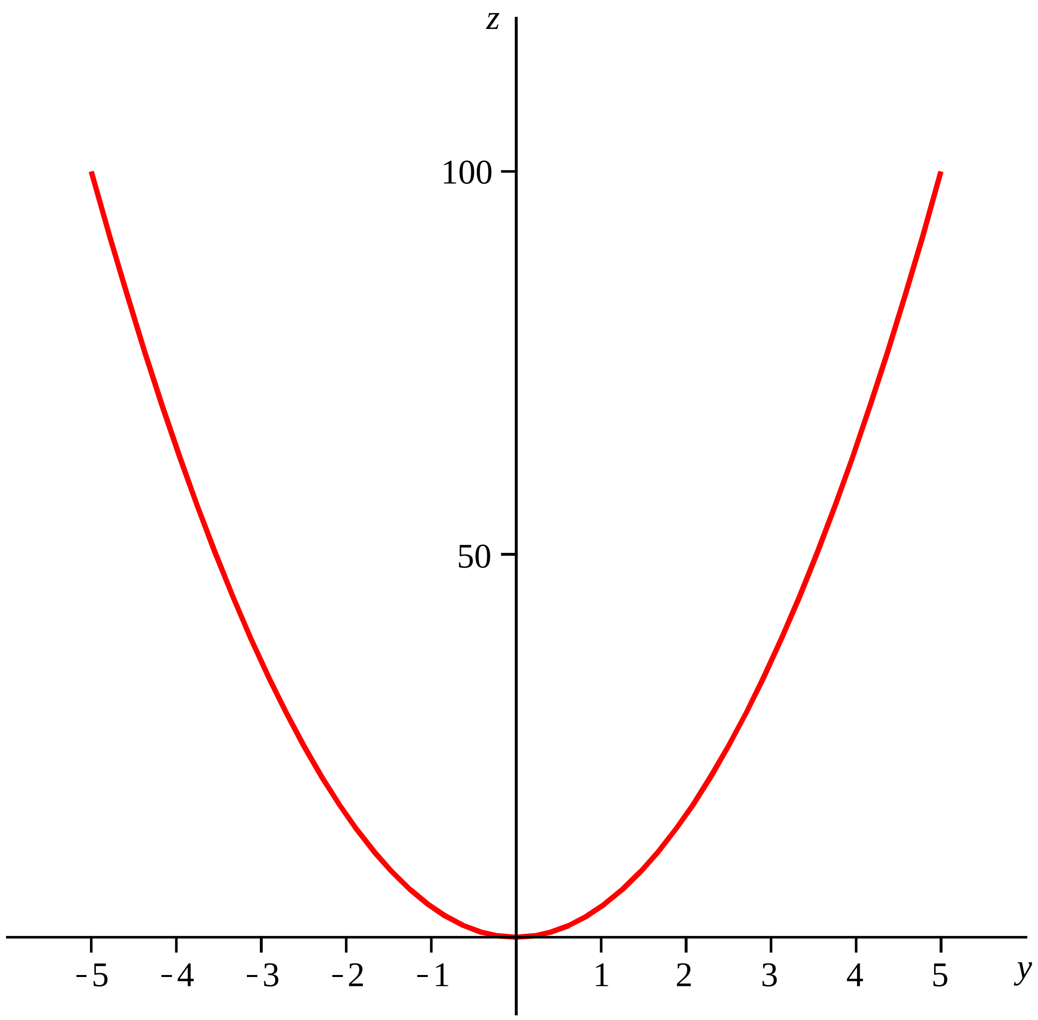
```
> g1:=plot3d(f1(x,y),x=-4..4,y=-5..5,view=-10..14,axes=None,
  grid=[50,50],style=patchnogrid,orientation=[-60,79],
  transparency=0.3,tickmarks=[[1],[1],[1]],labels=["","",""])
  :
  g2:=line([0,0,-10],[0,0,14],color=black,thickness=2):#axe
  des altitudes
  g2a:=line([-0.1,0,1],[0.1,0,1],color=black,thickness=2)
  :#graduation
  g3:=line([-4,0,0],[4,0,0],color=black,thickness=2):#axe des
  abscisses
  g3a:=line([1,-0.1,0],[1,0.1,0],color=black,thickness=2)
  :#graduation
  g4:=line([0,-5,0],[0,5,0],color=black,thickness=2):#axe des
  ordonnées
  g4a:=line([-0.1,1,0],[0.1,1,0],color=black,thickness=2)
  :#graduation
  g5:=textplot3d([0.1,0.1,-0.5,O,font=[times,bold,10]],color=
  black,thickness=2):#label de l'origine
  g6:=textplot3d([4.2,0,0,x,font=[times,italic,12]],color=
```

```
black,thickness=2):#label x
g7:=textplot3d([0.2,5.2,0.5,y,font=[times,italic,12]],
color=black,thickness=2):#label y
g8:=textplot3d([0.1,0.1,14,z,font=[times,italic,12]],color=
black,thickness=2):#label z
graf1:=display({g1,g2,g2a,g3,g3a,g4,g4a,g6,g7,g8}):graf1;
```



2. Si $x = 0$, on doit représenter une courbe dans le plan yOz avec `plot`.

```
> px:=plot(f1(0,y),y=-5..5,view=[-6..6,-10..120],labels=["",
""],tickmarks=[0,0],thickness=2):
pxa:=textplot({[6,-4,y],[-0.25,120,z]},tickmarks=[[-5,-4,
-3,-2,-1,1,2,3,4,5],4]):
display({px,pxa});
```



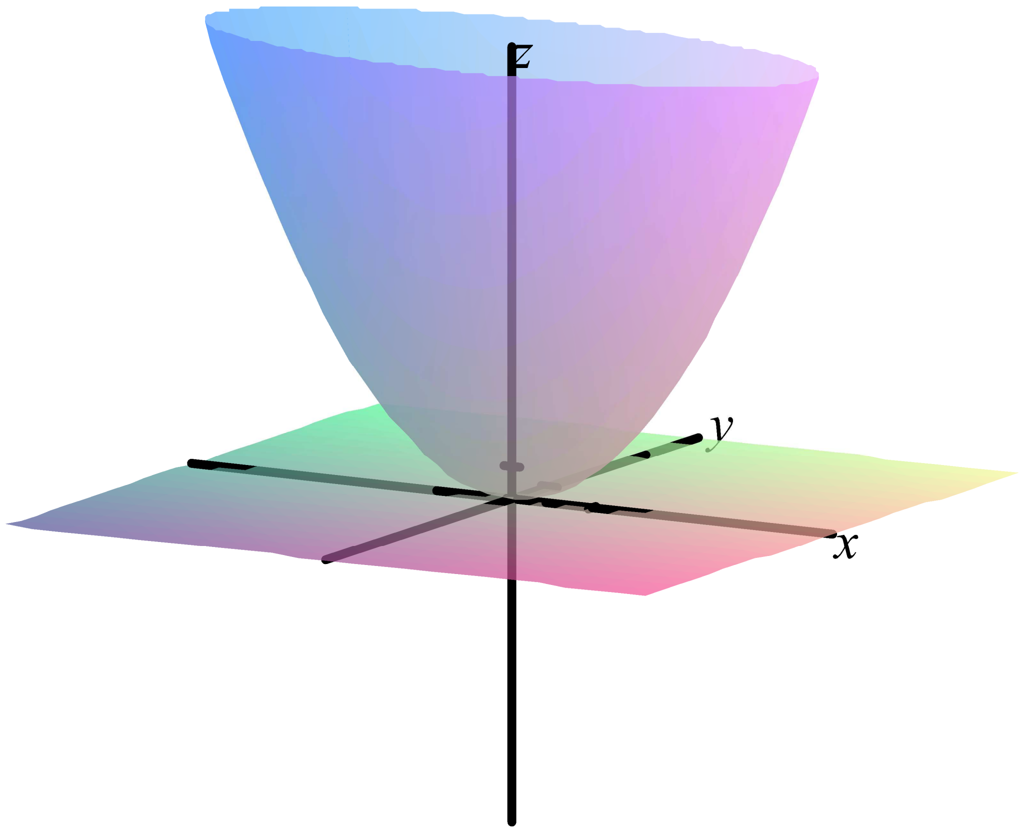
L'intersection est une parabole, d'où le nom de **paraboloïde** elliptique pour la surface (S).

3. La question demande deux représentations graphiques par cas : la courbe de niveau dans l'espace et sa projection dans le plan xOy.

Cas $z = 0$

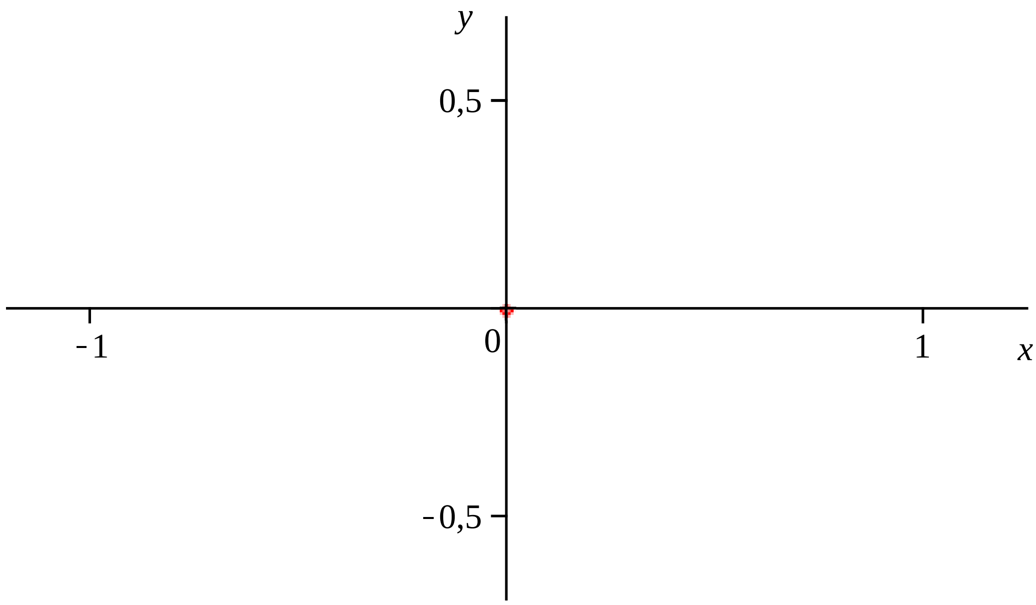
On visualise l'intersection de (S) et du plan d'équation $z = 0$ en réunissant les deux graphes avec **display**.

```
> g9:=plot3d(0,x=-4..4,y=-5..5,style=patchnogrid,labels=["",
  "",""],transparency=0.3):#graphe du plan z=0
  display({graf1,g9});#réunion de (S) et du plan z=0
```



Pour la projection dans le plan xOy, on utilise la commande **implicitplot**.

```
> p0:=implicitplot(f1(x,y)=0,x=-4..4,y=-5..5,numpoints=
  100000,scaling=constrained,view=[-1.2..1.2,-0.7..0.7],
  labels=["",""],tickmarks=[0,0],thickness=2):
  p0a:=textplot({[1.25,-0.1,x],[-0.1,0.7,y]},tickmarks=[4,4])
  :
  p0b:=pointplot([0,0],thickness=10,color=red):
  display({p0,p0a,p0b});
```



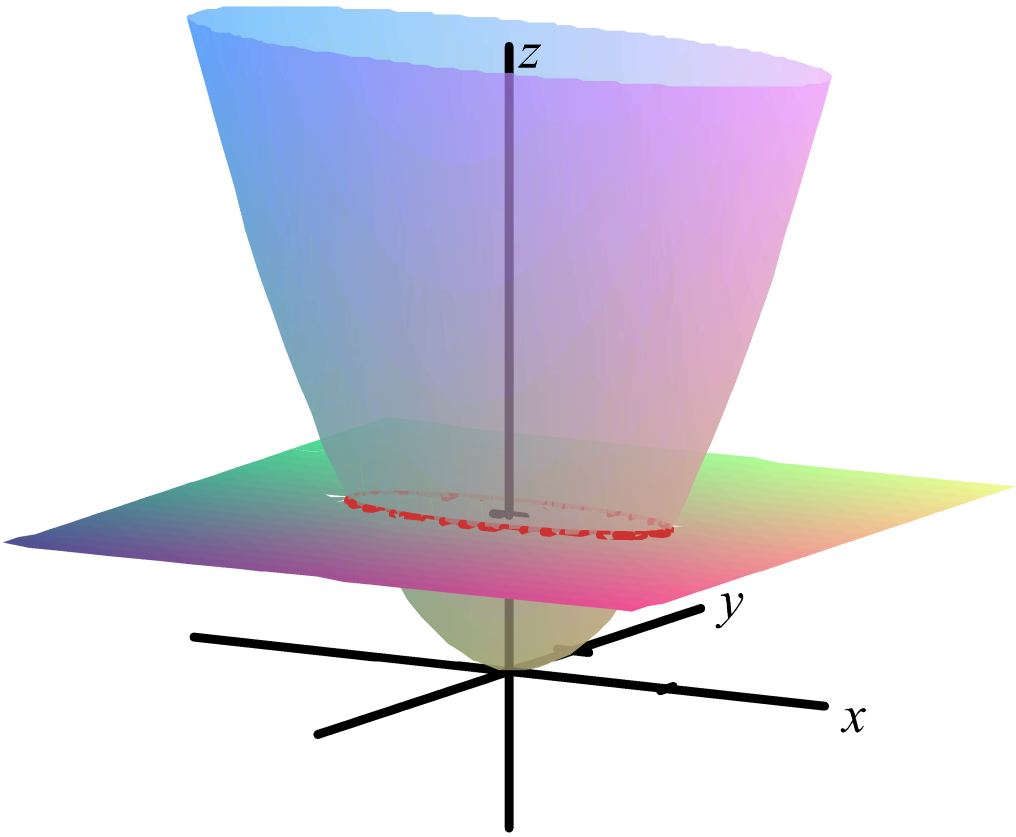
La courbe de niveau est clairement réduite à un point.

Cas $z = 1$

Dans l'espace, la courbe de niveau est maintenant une ellipse, qu'on met en valeur avec la commande **spacecurve** (non sans avoir correctement paramétré l'équation $x^2 + 4\,y^2 = 1$ par la transformation $x = \cos(t)$ et $y = \frac{\sin(t)}{2}$).

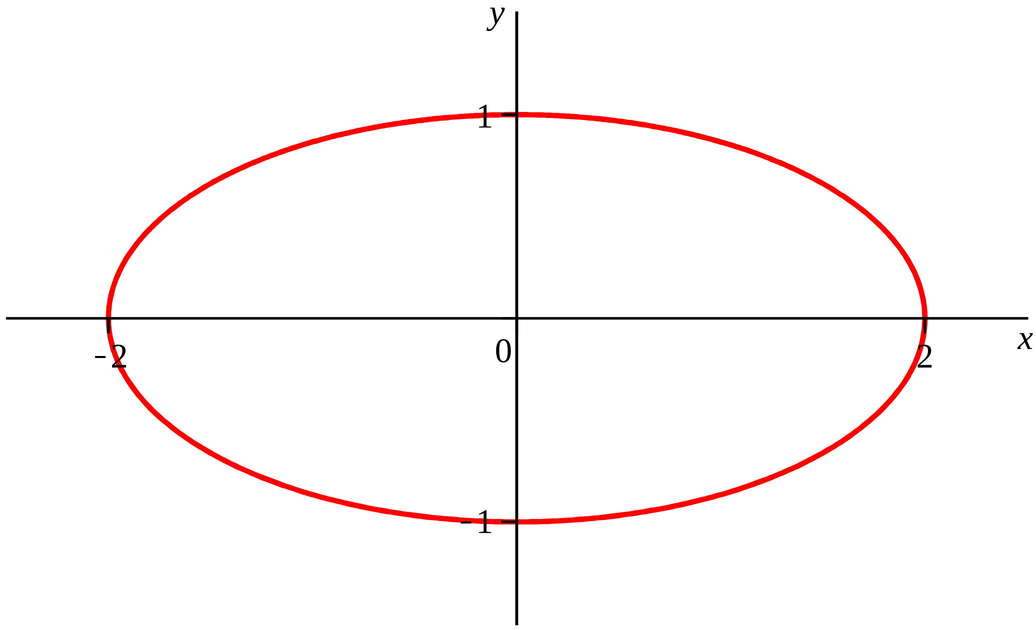
```
> h1:=plot3d(f1(x,y),x=-2..2,y=-3..3,view=-1..4,axes=None,
  grid=[50,50],style=patchnogrid,orientation=[-60,79],
  transparency=0.3,tickmarks=[[1],[1],[1]],labels=["","",""])
  :#"recadrage" de (S) pour x=-2..2, y=-3..3 et z=-1..4.
  h2:=line([0,0,-1],[0,0,4],color=black,thickness=2):
  h2a:=line([-0.1,0,1],[0.1,0,1],color=black,thickness=2):
  h3:=line([-2,0,0],[2,0,0],color=black,thickness=2):
  h3a:=line([1,-0.1,0],[1,0.1,0],color=black,thickness=2):
  h4:=line([0,-3,0],[0,3,0],color=black,thickness=2):
  h4a:=line([-0.1,1,0],[0.1,1,0],color=black,thickness=2):
  h5:=textplot3d([0.1,0.1,-0.5,O,font=[times,bold,10]],color=
  black,thickness=2):
  h6:=textplot3d([2.2,0,0,x,font=[times,italic,12]],color=
  black,thickness=2):
  h7:=textplot3d([0.2,3,0.1,y,font=[times,italic,12]],color=
```

```
black,thickness=2):
h8:=textplot3d([0.1,0.1,4,z,font=[times,italic,12]],color=
black,thickness=2):
h9:=plot3d(1,x=-2..2,y=-3..3,style=patchnogrid,labels=["",
"",""],transparency=0):#graphe du plan z=1.
h10:=spacecurve([cos(t),sin(t)/2,f1(cos(t),sin(t)/2)],t=0.
.2*Pi,color=orange,thickness=2):#intersection de (S) et du
plan z=1.
graf2:=display({h1,h2,h2a,h3,h3a,h4,h4a,h6,h7,h8,h9,h10})
:graf2;
```



La projection fait appel à **implicitplot** comme dans la question précédente.

```
> p4:=implicitplot(f1(x,y)=4,x=-4..4,y=-5..5,numpoints=
100000,scaling=constrained,labels=["",""],tickmarks=[0,0],
thickness=2,view=[-2.5..2.5,-1.5..1.5]):
p4a:=textplot({[2.5,-0.1,x],[-0.1,1.5,y]},tickmarks=[4,4]):
display({p4,p4a});
```

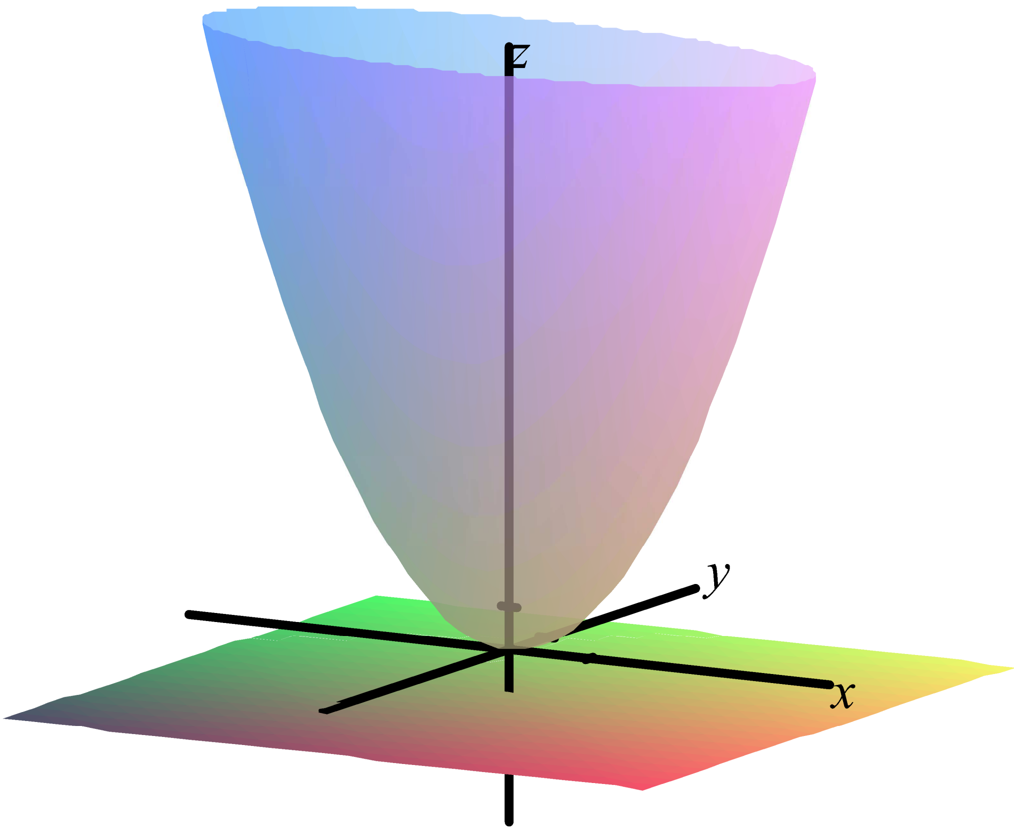


L'intersection est une ellipse, d'où le nom de paraboloïde **elliptique** pour la surface (S).

$z = -1$

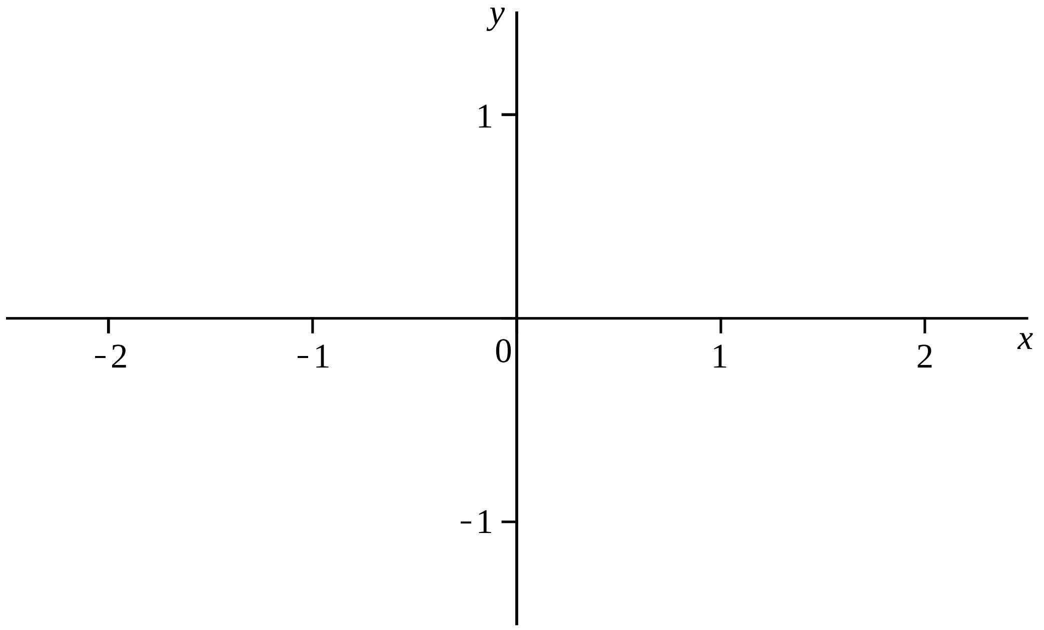
Représentation de la courbe de niveau dans l'espace.

```
> k1:=plot3d(f1(x,y),x=-4..4,y=-5..5,view=-4..14,axes=None,
grid=[50,50],style=patchnogrid,orientation=[-60,79],
transparency=0.3,tickmarks=[[1],[1],[1]],labels=["","",""])
:#"recadrage" de (S) pour x=-4..4, y=-5..5 et z=-4..14.
graf4:=display({k1,g2,g2a,g3,g3a,g4,g4a,g6,g7,g8}):
k9:=plot3d(-1,x=-4..4,y=-5..5,style=patchnogrid,labels=["",
"",""],transparency=0):#graphe du plan z=-1
display({graf4,k9});
```



Représentation de la projection de la courbe de niveau dans le plan xOy.

```
> p1m:=implicitplot(f1(x,y)=-1,x=-4..4,y=-5..5,numpoints=
  100000,scaling=constrained,labels=["",""],tickmarks=[0,0],
  thickness=2,view=[-2.5..2.5,-1.5..1.5]):
  p1ma:=textplot({[2.5,-0.1,x],[-0.1,1.5,y]},tickmarks=[6,4])
  :
  display({p1m,p1ma});
```



Evidemment, l'intersection est vide.

Exercice M2

Enoncé

La surface (S) est le graphe de la fonction f définie par $f(x, y) = -x^2 + y^2$.

1. Donner une représentation géométrique dans l'espace de (S). On obtient un paraboloïde hyperbolique.

2. Tracer l'intersection de (S) avec le plan d'équation $x = 0$.

3. Tracer les courbes de niveau correspondant à chacun des cas suivants : $z = 0$, $z = 1$ et $z = -1$.

Solution

La méthode de travail est similaire à celle de l'exercice précédent.

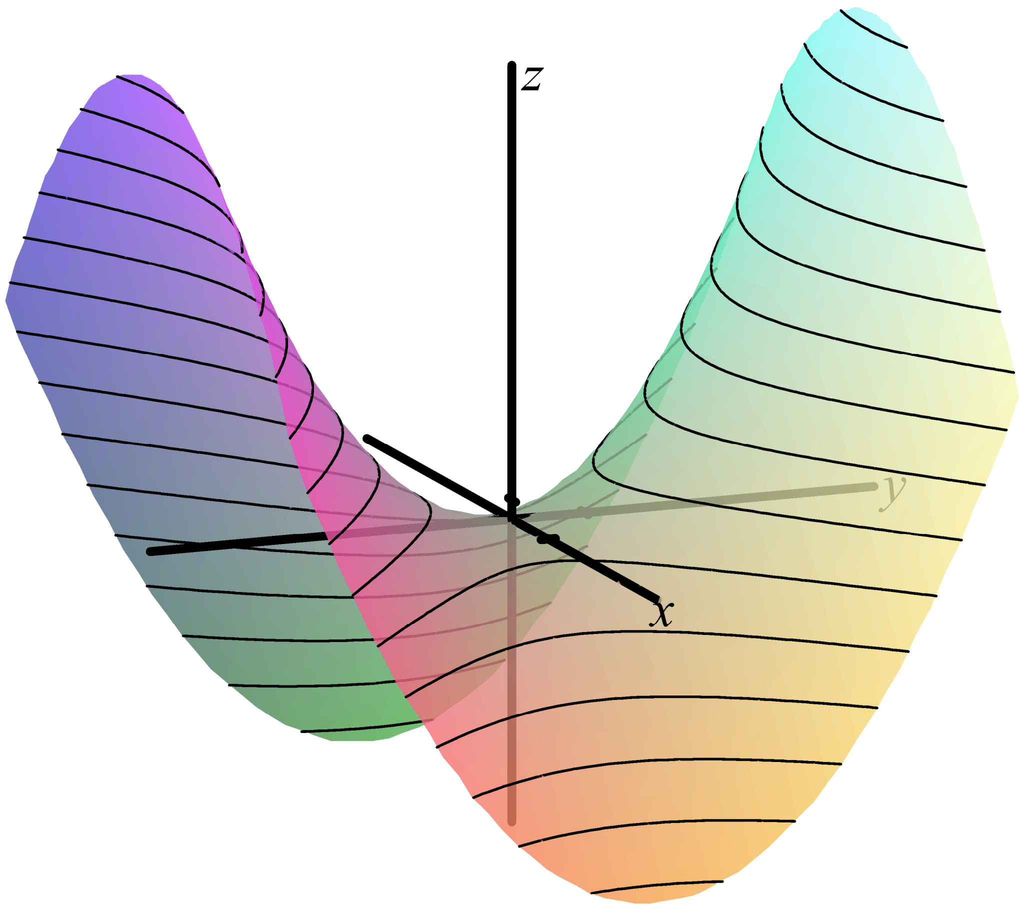
```
> restart;
  with(plots):with(plottools):
  f2:=(x,y)->-x^2+y^2;
```

$$f2 := (x, y) \rightarrow -x^2 + y^2 \tag{2.1}$$

1. Ce premier graphique met en évidence le paraboloïde hyperbolique engendré par la fonction `f2`. En économie, on se réfère à cette surface très typée par l'expression **col** ou **selle** (de cheval).

```
> g1:=plot3d(f2(x,y),x=-4..4,y=-5..5,axes=None,grid=[50,50],
  style=surfacecontour,contours=15,orientation=[-22,77],
  transparency=0.2,tickmarks=[[1],[1],[1]],labels=["","",""])
```

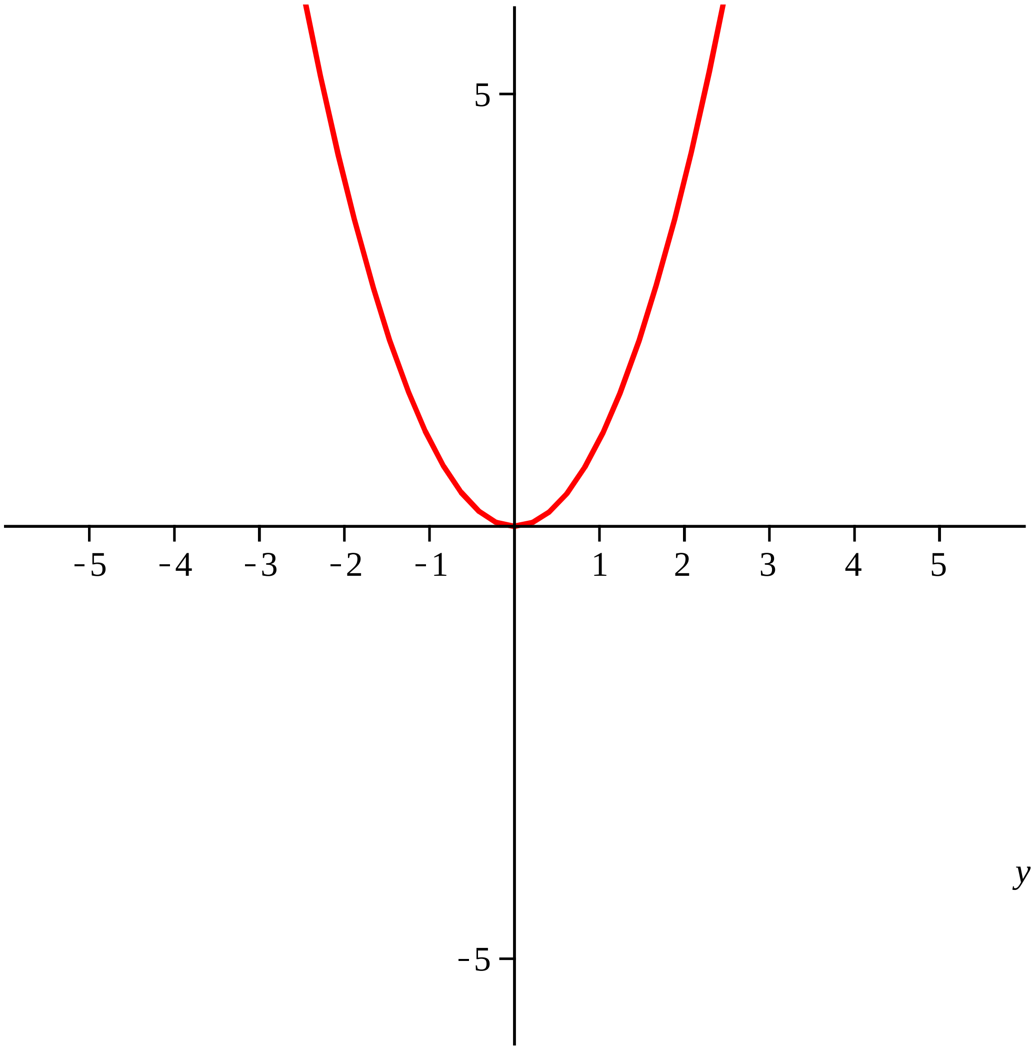
```
:
g2:=line([0,0,-16],[0,0,24],color=black,thickness=2):
g2a:=line([-0.1,0,1],[0.1,0,1],color=black,thickness=2):
g3:=line([-4,0,0],[4,0,0],color=black,thickness=2):
g3a:=line([1,-0.1,0],[1,0.1,0],color=black,thickness=2):
g4:=line([0,-5,0],[0,5,0],color=black,thickness=2):
g4a:=line([-0.1,1,0],[0.1,1,0],color=black,thickness=2):
g5:=textplot3d([0.1,0.1,-0.5,O,font=[times,bold,10]],color=
black,thickness=2):
g6:=textplot3d([4.2,0,0,x,font=[times,italic,12]],color=
black,thickness=2):
g7:=textplot3d([0.2,5.2,0.5,y,font=[times,italic,12]],
color=black,thickness=2):
g8:=textplot3d([0.2,0.2,24,z,font=[times,italic,12]],color=
black,thickness=2):
graf1:=display({g1,g2,g2a,g3,g3a,g4,g4a,g6,g7,g8}):graf1;
```



2.

```
> px:=plot(f2(0,y),y=-5..5,view=[-6..6,-6..6],labels=["",""],
tickmarks=[0,0],thickness=2):
pxa:=textplot({[6,-4,y],[-0.25,120,z]},tickmarks=[[-5,-4,
```

```
-3,-2,-1,1,2,3,4,5],4]):
display({px,pxa});
```



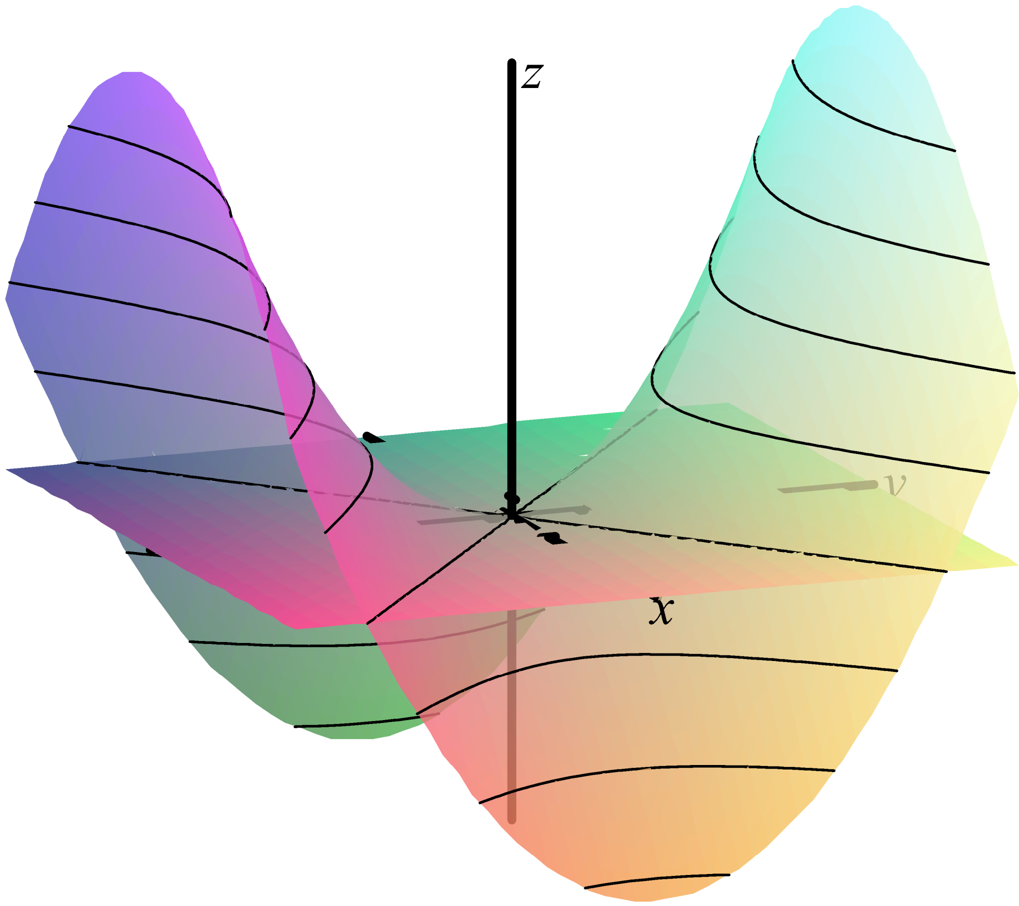
L'intersection est une parabole, d'où le nom de **paraboloïde** hyperbolique pour la surface (S).

3. Comme dans l'exercice précédent, il faut construire deux représentations graphiques par cas : la courbe de niveau dans l'espace et sa projection dans le plan xOy.

Cas $z = 0$

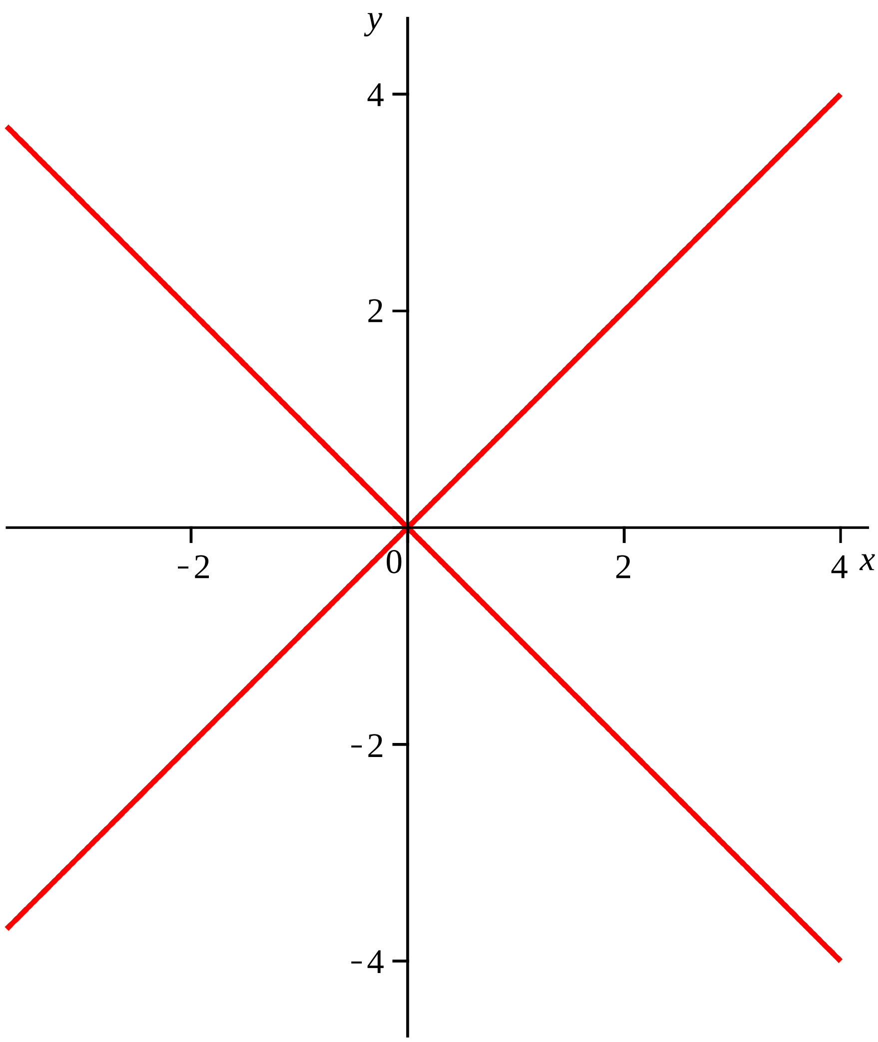
Représentation de la courbe de niveau dans l'espace.

```
> g1a:=plot3d(f2(x,y),x=-4..4,y=-5..5,axes=None,grid=[50,50],
style=surfacecontour,contours=[-15,-10,-5,0,5,10,15,20],
orientation=[-22,77],transparency=0.2,tickmarks=[[1],[1],
[1]],labels=["","",""]):
g9:=plot3d(0,x=-4..4,y=-5..5,style=patchnogrid,labels=["",
"",""],transparency=0):
display({g1a,g2,g2a,g3,g3a,g4,g4a,g6,g7,g8,g9});
```



Projection dans le plan xOy.

```
> p0:=implicitplot(f2(x,y)=0,x=-4..4,y=-5..5,numpoints=
  100000,scaling=constrained,view=[-3.7..3.7,-4.7..4.7],
  labels=["",""],tickmarks=[0,0],thickness=2):
  p0a:=textplot({[4.25,-0.3,x],[-0.3,4.7,y]},tickmarks=[4,4])
  :
  display({p0,p0a});
```

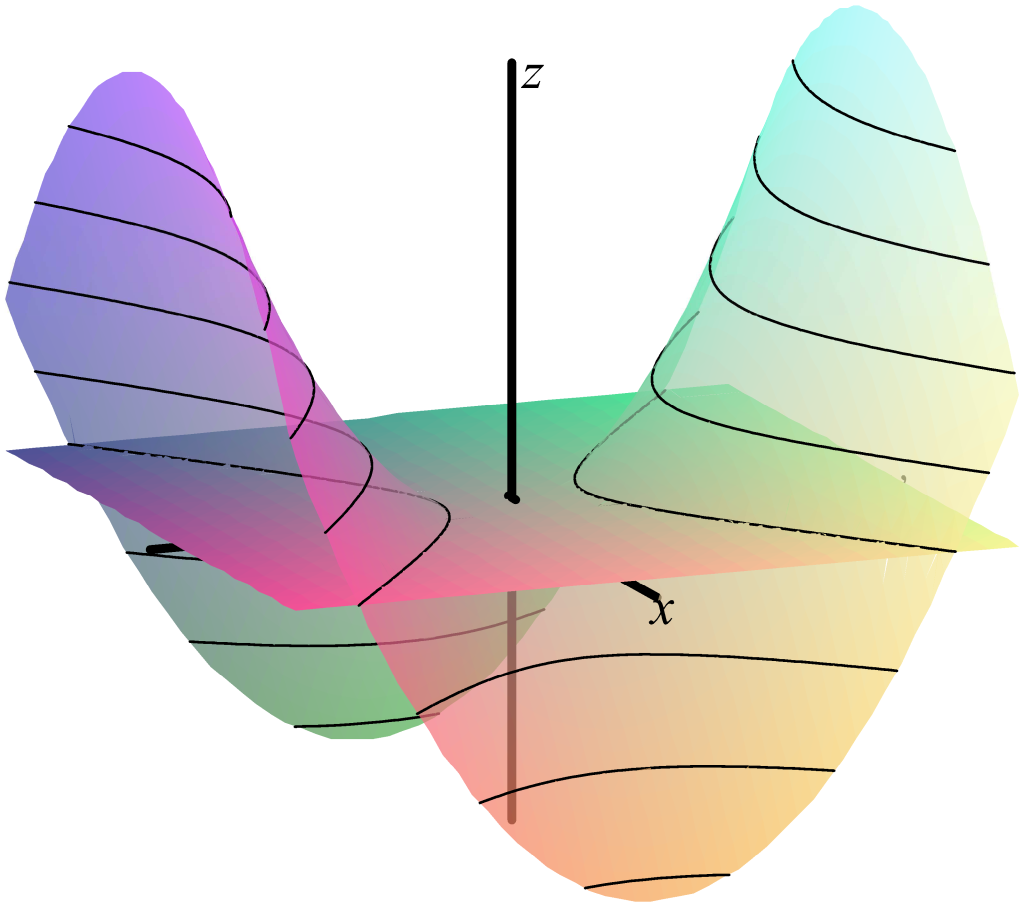


La courbe de niveau est formée de deux droites qui se coupent à l'origine. Il s'agit en fait d'une hyperbole dégénérée.

Cas $z = 1$

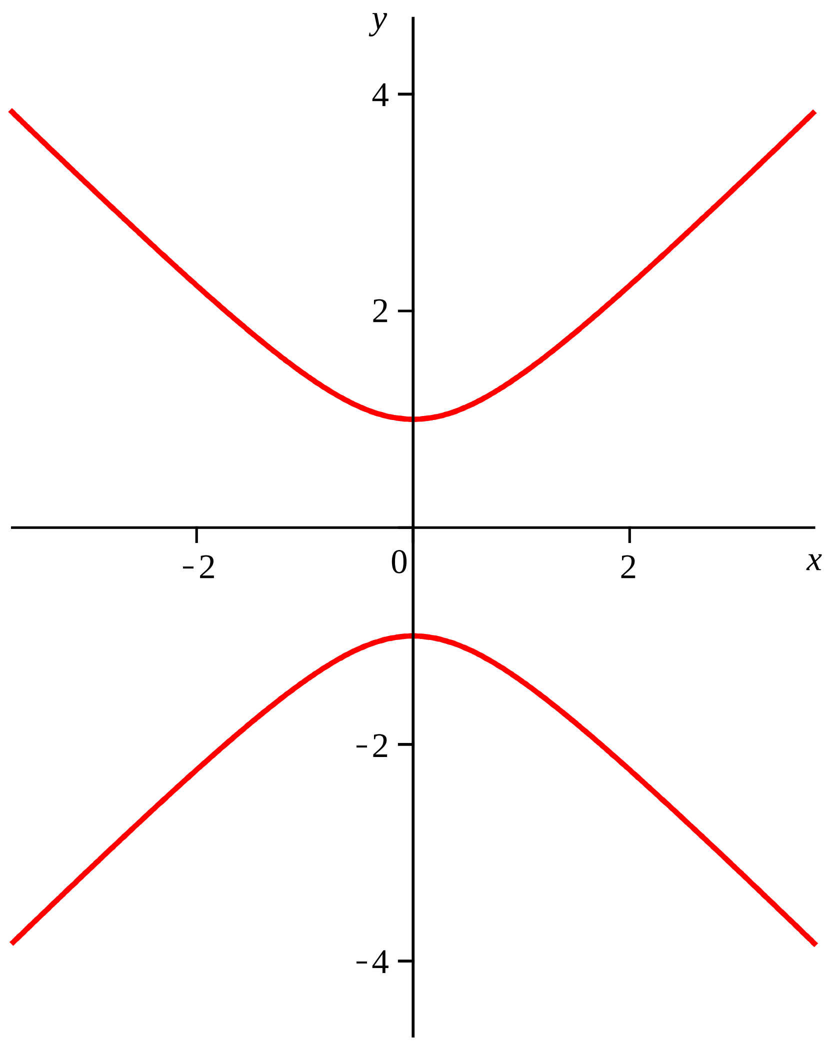
Représentation de la courbe de niveau dans l'espace.

```
> g1b:=plot3d(f2(x,y),x=-4..4,y=-5..5,axes=None,grid=[50,50],
  style=surfacecontour,contours=[-15,-10,-5,1,5,10,15,20],
  orientation=[-22,77],transparency=0.3,tickmarks=[[1],[1],
  [1]],labels=["","",""]):
  g10:=plot3d(1,x=-4..4,y=-5..5,style=patchnogrid,labels=["",
  "",""],transparency=0):
  display({g1b,g2,g2a,g3,g3a,g4,g4a,g6,g7,g8,g10});
```



Projection dans le plan xOy.

```
> p1:=implicitplot(f2(x,y)=1,x=-4..4,y=-5..5,numpoints=
  100000,scaling=constrained,view=[-3.7..3.7,-4.7..4.7],
  labels=["",""],tickmarks=[0,0],thickness=2):
  p1a:=textplot({[3.7,-0.3,x],[-0.3,4.7,y]},tickmarks=[4,4]):
  display({p1,p1a});
```

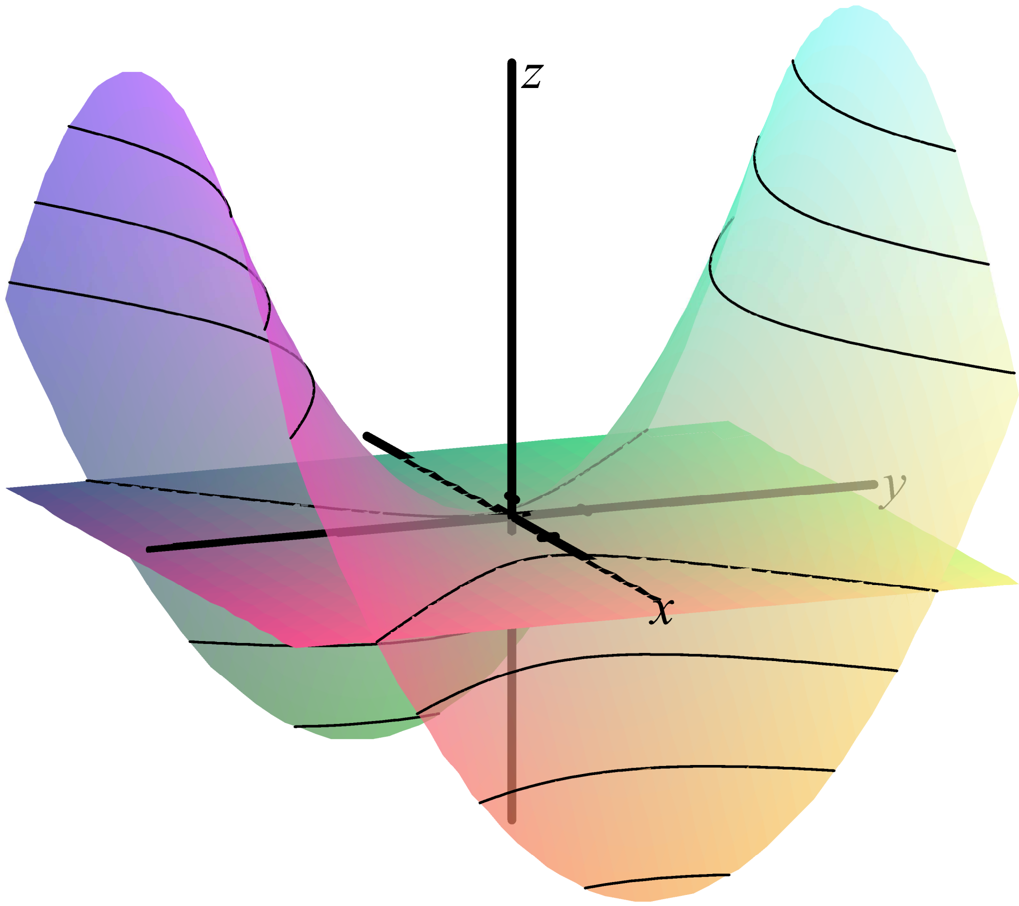


L'intersection est une hyperbole, d'où le nom de paraboloïde **hyperbolique** pour la surface (S).

$z=-1$

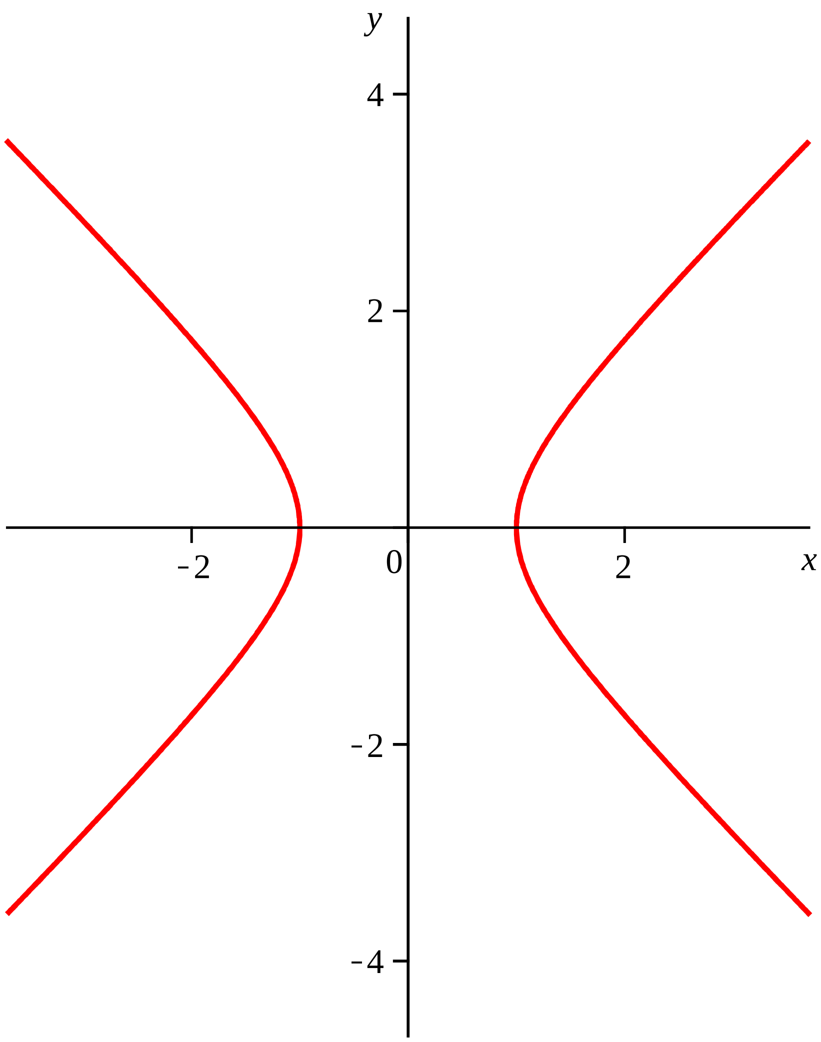
Représentation de la courbe de niveau dans l'espace.

```
> g1d:=plot3d(f2(x,y),x=-4..4,y=-5..5,axes=None,grid=[50,50],
  style=surfacecontour,contours=[-15,-10,-5,-1,10,15,20],
  orientation=[-22,77],transparency=0.3,tickmarks=[[1],[1],
  [1]],labels=["","",""]):
  g12:=plot3d(-1,x=-4..4,y=-5..5,style=patchnogrid,labels=
  ["","",""],transparency=0):
  display({g1d,g2,g2a,g3,g3a,g4,g4a,g6,g7,g8,g12});
```



Représentation de la projection de la courbe de niveau dans le plan xOy.

```
> pm:=implicitplot(f2(x,y)=-1,x=-4..4,y=-5..5,numpoints=
  100000,scaling=constrained,labels=["",""],tickmarks=[0,0],
  thickness=2,view=[-3.7..3.7,-4.7..4.7]):
  pma:=textplot({[3.7,-0.3,x],[-0.3,4.7,y]},tickmarks=[4,4]):
  display({pm,pma});
```



L'intersection est encore une hyperbole.

Exercice M3

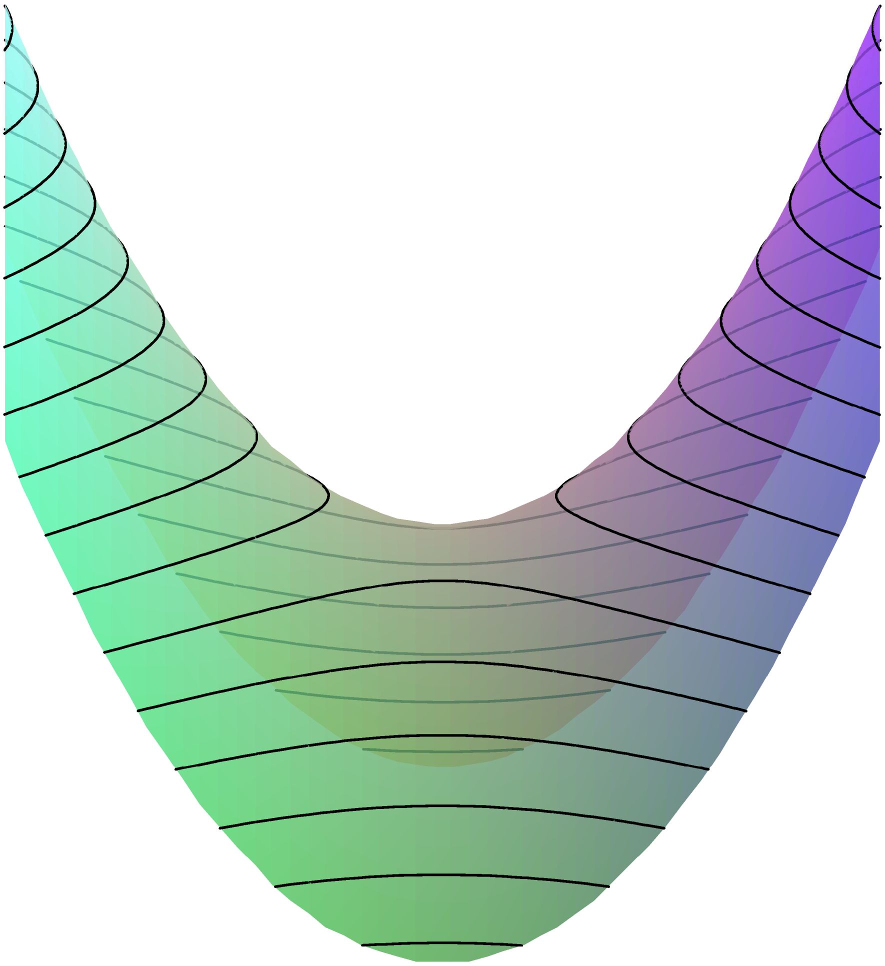
Enoncé

La surface d'équation $z = x^2 - y^2$ est observée à partir d'un point situé par 77° de latitude nord à l'infini. Créer une animation simulant le survol circulaire complet de la surface.

Solution

La commande **`animate`** du paquetage **`plots`** va porter sur un **`plot3d`**. Le paramétrage porte, non pas sur la fonction à tracer, mais sur l'option graphique **`orientation`**. La coordonnée φ prend toutes les valeurs entre $-180°$ et $+180°$ alors que l'angle θ reste constant.

```
> restart;
  f2:=(x,y)->-x^2+y^2:
  with(plots):
  animate[plots](plot3d,[f2(x,y),x=-4..4,y=-5..5,axes=None,
  grid=[50,50],style=surfacecontour,contours=15,transparency=
  0.2,orientation=[-180+i*360/25,77]],i=0..25);
```



Exercice E1

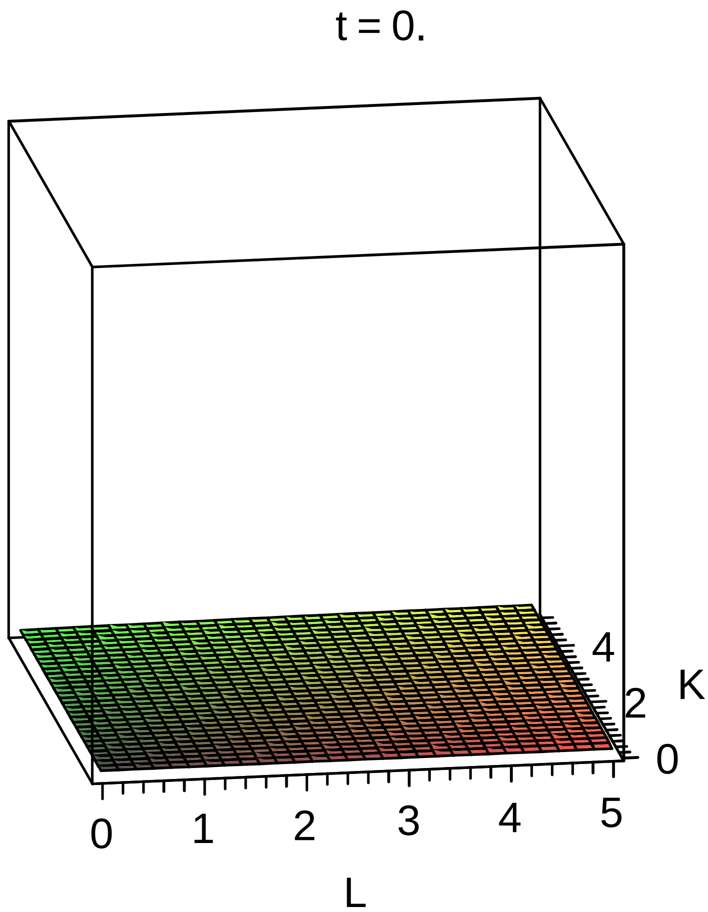
Enoncé

On considère une fonction de Cobb-Douglas à rendements constants pour le travail et le capital et intégrant le progrès technique supposé croître à taux constant dans le temps. Construire une animation montrant comment la surface de production s'élève par l'effet du progrès technique.

Solution

La fonction de production s'écrit ici $f(L, K, t) = e^{\chi t} L^{\alpha} K^{1-\alpha}$. Le paramètre de l'animation est le temps, qu'on fait défiler entre 0 et 20. On retient ici les valeurs de paramètres économiques : χ (rythme du progrès technique) = 0.25; α (élasticité du travail) = $\frac{2}{3}$.

```
> restart;
  with(plots):
  animate(plot3d,[exp(0.25*t)*L^(2/3)*K^(1/3),L=0..5,K=0..5,
  orientation=[-99,74 ],axes=boxed,grid=[30,30]],t=0..20,
  frames=40);
```


t = 0.
4
2
K
0
0
1
2
3
4
5
L